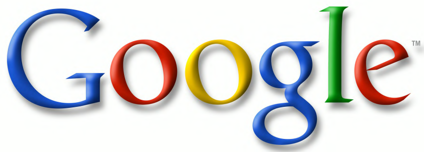


N° D'ORDRE
802

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

Par M. X. ANTOMARI

Ancien élève de l'École Normale Supérieure, Directeur des Études à l'École Monge.

1[re] THÈSE. — APPLICATION DE LA MÉTHODE CINÉMATIQUE A L'ÉTUDE DES SURFACES RÉGLÉES ; MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE ASSUJETTI A CINQ CONDITIONS.

2[e] THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 18 janvier 1894 devant la Commission d'Examen.

MM. DARBOUX, *Président.*
APPELL, } *Examinateurs.*
KOENIGS, }

PARIS

LIBRAIRIE NONY & C[ie]

17, RUE DES ÉCOLES, 17

—

1894

ACADÉMIE DE PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

	MM.	
DOYEN	DARBOUX	Géométrie supérieure.
PROFESSEURS HONORAIRES	PASTEUR.	
	DUCHARTRE	Botanique.
PROFESSEURS	DE LACAZE-DUTHIERS	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	TROOST	Chimie.
	FRIEDEL	Chimie organique.
	TISSERAND	Astronomie.
	LIPPMANN	Physique.
	HAUTEFEUILLE	Minéralogie.
	BOUTY	Physique.
	APPELL	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ	Mécanique physique et expérimentale.
	PICARD	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	POINCARÉ	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	Yves DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BONNIER	Botanique.
	DASTRE	Physiologie.
	DITTE	Chimie.
	MUNIER-CHALMAS	Géologie.
	GIARD	Zoologie, Évolution des êtres organisés.
	WOLF	Astronomie.
PROFESSEURS ADJOINTS	CHATIN	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	JOLY	Chimie.
	PELLAT	Physique.
SECRÉTAIRE	FOUSSEREAU.	

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet.

A MESSIEURS **APPELL** ET **PICARD**

MEMBRES DE L'INSTITUT

Témoignage de reconnaissance.

PREMIÈRE THÈSE

APPLICATION DE LA MÉTHODE CINÉMATIQUE

A L'ÉTUDE DES

PROPRIÉTÉS DES SURFACES RÉGLÉES ;

MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE ASSUJETTI A CINQ CONDITIONS

INTRODUCTION

Après la sphère, les surfaces réglées sont celles dont on conçoit le mieux la génération. Leur étude, en raison de leur apparente simplicité, devait donc attirer tout spécialement l'attention des géomètres : aussi les travaux sur cette classe si importante de surfaces sont-ils fort nombreux ; citons parmi les plus importants ceux de Minding (*Journal de Crelle*, tome XVIII), de Bonnet (*Journal de l'Ecole Polytechnique*, 32ᵉ et 39ᵉ cahiers), de Bour (*Journal de l'École Polytechnique*, tome 22) et de M. Beltrami (*Annali di matematica pura ed applicata*, tome 7).

Minding s'est, le premier, occupé de la déformation des surfaces réglées ; à ce titre, son travail mérite d'être cité en première ligne. La question a été reprise ensuite par tous les géomètres qui se sont occupés des surfaces réglées. M. Bonnet a donné des propriétés importantes concernant les lignes géodésiques, les trajectoires orthogonales et la ligne de striction ; ces propriétés, que nous retrouverons en partie dans ce travail, ont été démontrées à nouveau et complétées par M. P. Serret, par l'emploi systématique de l'indicatrice sphérique, dont ce géomètre est, comme on sait, l'inventeur.

Bour, dans son célèbre mémoire sur la déformation des surfaces (*loc. cit.*), a remarqué le premier que la détermination d'une surface réglée, abstraction faite de sa position dans l'espace, résulte complètement de trois fonctions α, β, u, dont les deux premières sont invariables quand on déforme la surface ; quant à la troi-

sième, sa différentielle exprime pour chaque génératrice l'angle de contingence du cône directeur.

L'une des deux premières représente cet élément si important introduit par Chasles et appelé *paramètre de distribution* ; l'autre est d'une nature un peu plus cachée, et la méthode de Bour, basée sur l'emploi d'un système de coordonnées orthogonales, semble peu propre à renseigner exactement sur la définition et sur le rôle de cette fonction.

Le beau mémoire de M. Beltrami, « *Sulla flessione delle superficie rigate* », mérite une mention toute spéciale. C'est dans ce mémoire que se trouvent abordés pour la première fois des problèmes du plus haut intérêt, tels que :

La déformation d'une surface réglée de manière que chaque génératrice de la transformée soit parallèle à la génératrice correspondante de la proposée ;

La déformation d'une surface gauche de manière à transformer une ligne quelconque de la première en ligne asymptotique de la deuxième, etc.

Signalons encore les travaux de M. Enneper (*Zeitschrift für Mathematik und Physik*) et de M. Catalan (*Journal de l'École Polytechnique*). Ajoutons enfin que ces divers travaux ont été repris tout récemment par M. Darboux dans ses « *Leçons sur la théorie générale des surfaces* », où se trouvent si magistralement condensées tant de connaissances géométriques.

Le présent travail est basé sur l'emploi de la méthode cinématique ; il comprend deux parties : la première est consacrée à l'étude des surfaces réglées, et dans la deuxième j'applique les résultats obtenus à l'étude du mouvement d'un corps solide assujetti à cinq conditions.

Pour faire l'étude d'une surface réglée, je rapporte la surface à un trièdre trirectangle mobile que j'appelle *le trièdre attaché à la surface* et qui est défini de la manière suivante :

L'axe des x est une génératrice G de la surface et l'origine est le point central sur cette génératrice ;

L'axe des y est la normale à la génératrice menée par l'origine dans le plan asymptote à la surface suivant G ;

L'axe des z résulte des deux premiers.

Je prends comme variable indépendante l'arc t de l'indicatrice sphérique de la surface et j'observe tout de suite que le mouvement du trièdre ne dépend que de trois fonctions que je désigne par les lettres θ, h, k, et qui sont définies comme il suit :

θ est la courbure géodésique du cône directeur ;

h est la projection, sur la génératrice, de la vitesse du point central, quand on suppose que t représente aussi le temps ;

Enfin k est la projection de la même vitesse sur la normale au plan asymptote, ou encore le paramètre de distribution de la surface.

La détermination de la surface réglée, abstraction faite de sa position dans l'espace, résulte de ces trois fonctions de t. Je les appelle pour cette raison *les trois invariants de la surface* : ce sont des invariants au même titre que le rayon de courbure et le rayon de torsion sont les invariants d'une courbe gauche. La classification des surfaces réglées résulte immédiatement des valeurs remarquables de ces invariants. Sans entrer dans de longs développements, je me borne à transcrire ici les principaux résultats.

Si $k = 0$, la surface est développable et h est le rayon de courbure de l'arête de rebroussement ;

Si $h = 0$, la surface est un lieu de binormales à une courbe gauche ;

Si $\theta = 0$, la surface a un plan directeur ;

Si $\theta = 0$ et $k = 0$, la surface est formée par les tangentes à une courbe plane dont h est le rayon de courbure ;

Si $\theta = 0$, $h = 0$, $k \neq 0$, la surface est un conoïde droit ;

Si h et k sont constants, la surface est un hélicoïde ;

Enfin si θ est constant, le cône directeur de la surface est de révolution.

Dans le mémoire déjà cité de Bour, la détermination d'une surface réglée, abstraction faite de sa position dans l'espace, résulte aussi de trois fonctions qui se rapprochent de celles que j'emploie, mais dont la définition est moins simple. L'une de ces fonctions est le paramètre de distribution, mais les deux autres sont les intégrales respectives de h et de θ. A ce titre elles sont moins simples, car pour une même surface elles dépendent chacune d'une constante arbitraire, de sorte que si ces trois fonctions sont données, la surface n'est pas complètement déterminée de forme. Cet inconvénient disparaît dès que l'on donne θ, h et k ; bien plus, l'élément linéaire de la surface ne dépend que des fonctions h et k, de sorte que l'applicabilité des surfaces réglées ne dépend elle-même que de ces deux fonctions. C'est ainsi, par exemple, qu'une surface réglée donnée peut toujours être appliquée, génératrices par génératrices, sur une autre surface réglée à plan directeur convenablement choisie.

Quand on donne θ, h et k en fonction de t, le problème de la détermination de la surface se subdivise en deux : le premier a pour objet la détermination du cône directeur, et la solution est fournie par l'intégration d'une équation de Riccati. Cette

équation une fois intégrée, on en déduit les neuf cosinus du trièdre attaché à la surface, et celle-ci est alors définie par les équations suivantes :

$$x = \int (h\alpha + k\alpha_2)\,dt + \alpha\rho,$$

$$y = \int (h\beta + k\beta_2)\,dt + \beta\rho,$$

$$z = \int (h\gamma + k\gamma_2)\,dt + \gamma\rho.$$

Si l'on fait du reste $\rho = 0$ dans ces équations, elles définissent la ligne de striction.

J'ai repris par l'emploi systématique de ces trois fonctions θ, h et k, l'étude des principales propriétés des surfaces réglées et je crois avoir montré que la méthode s'y prête de la manière la plus simple. Je me borne à citer les démonstrations des théorèmes de Bonnet, Beltrami et Laguerre sur la déformation des surfaces réglées. Je me suis d'ailleurs surtout attaché à ne développer que les points qui m'ont paru nouveaux et que je vais indiquer rapidement en suivant le plan même du travail.

Dans le § I de la première partie, je donne la définition des invariants, les interprétations géométriques de leurs valeurs particulières et je montre que le contact d'ordre n de deux surfaces réglées est exprimé :

Par l'égalité des invariants θ et de leurs $n-2$ premières dérivées ;
Par l'égalité des invariants h et de leurs $n-2$ premières dérivées ;
Par l'égalité des invariants k et de leurs $n-1$ premières dérivées.

Dans le § II j'étudie des relations nouvelles et remarquables entre une surface réglée et sa développable asymptote. Je montre que la distance de la génératrice d'une surface réglée à la génératrice correspondante de la développable asymptote est égale au quotient $\frac{k}{\theta}$ ou encore à $\frac{k\rho}{\tau}$, ρ et τ désignant le rayon de courbure et le rayon de torsion de l'arête de rebroussement de la développable asymptote. Je déduis de là :

1° Un mode de génération de toute surface réglée dépourvue de plan directeur et qui permet de ramener à des problèmes sur les courbes certains problèmes sur les surfaces réglées. A la vérité cela ne résout pas ces problèmes, mais cela permet de juger en quelque sorte de leur degré de difficulté ;

2° La construction des surfaces réglées ayant un paramètre donné et particulièrement celles dont le paramètre est constant : cette construction équivaut à une véritable intégration. Dans le même paragraphe j'établis la réciprocité entre une surface réglée et la surface conjuguée de M. P. Serret, réciprocité mise en évidence

par les relations

$$\theta\theta_1 = 1, \qquad \theta h_1 = k, \qquad \theta k_1 = h,$$

où la signification de θ_1, h_1 et k_1 est évidente.

Le § III est consacré à l'étude, au moyen des invariants, d'une transformation de l'espace réglé signalée d'une manière tout à fait accessoire par M. Ribaucour, et qui me permet de résoudre sans intégration le problème suivant également résolu par M. Ribaucour dans un cas particulier :

Déterminer toutes les congruences dont l'enveloppée moyenne est un point.

Dans une note insérée aux *Comptes Rendus* (numéro du 28 mars 1892), M. Guichard a donné une transformation des figures et a énoncé, sans démonstration, la proposition suivante : *A une congruence de normales à une surface réglée, la transformation fait correspondre une congruence dont la surface moyenne est un plan, dont l'une des focales est une surface développable et dont l'autre est un lieu de paraboles.* Dans le § IV je donne la démonstration de cette proposition par le moyen des invariants.

Dans le § V je m'occupe de l'élément linéaire d'une surface réglée. Comme résultat nouveau je signale les relations entre les arêtes de rebroussement des développables asymptotes à deux surfaces réglées applicables avec parallélisme des génératrices. Je montre en particulier que si l'arête de rebroussement de la première est une courbe de M. Bertrand, on peut déterminer la seconde de façon à ce que son arête de rebroussement soit aussi une courbe de M. Bertrand. Je montre aussi que l'on peut déterminer une infinité de couples de surfaces réglées applicables avec parallélisme des génératrices et ayant même développable asymptote. Le reste du paragraphe est consacré à des démonstrations nouvelles de propriétés connues.

Dans le § VI j'étudie les trajectoires orthogonales des génératrices ; j'en détermine le rayon de courbure normale et le rayon de courbure géodésique. Je montre que les seules surfaces réglées dont toutes les trajectoires orthogonales sont des cercles géodésiques sont formées par des binormales à une courbe à torsion constante. Je prouve d'ailleurs qu'il n'y a pas en général de trajectoires orthogonales qui soient des cercles géodésiques, mais que s'il y en a une, il en existe une seconde de rayon égal et de signe contraire, et pas davantage ; de sorte que s'il y en a trois, il y en a une infinité, et la surface est formée par les binormales à une courbe à torsion constante.

Le § VII est consacré aux lignes asymptotiques ; entre autres choses je montre que l'on peut intégrer l'équation des lignes asymptotiques d'un lieu de binormales

à une courbe à torsion constante et je donne l'expression du rayon de courbure des lignes asymptotiques.

J'ai abordé dans le § VIII l'étude des lignes géodésiques. Je donne d'abord une forme remarquablement simple de l'équation de ces lignes et j'en tire certains résultats que j'avais obtenus antérieurement par une autre méthode et qui ont été publiés dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*. L'étude de la courbure et de la torsion d'une ligne géodésique me conduit à la relation

$$\frac{\sin \varphi}{\rho} + \frac{\cos \varphi}{\tau} = -\frac{k \cos \varphi}{\lambda^2 + k^2},$$

dans laquelle φ désigne le complément de l'angle que la tangente en un point d'une géodésique fait avec la génératrice qui passe par ce point et λ la distance de ce même point au point central correspondant; quant à la signification de ρ, τ et k, elle est évidente. Cette relation est la généralisation d'une relation concernant les surfaces développables et trouvée par M. P. Serret dans sa thèse, page 137.

Enfin, dans le § IX et dernier de la première partie, je m'occupe des lignes de courbure. J'y résous en particulier le problème suivant :

Trouver toutes les surfaces réglées dont la ligne de striction est plane et est en même temps ligne de courbure.

Dans la deuxième partie, j'applique la notion des invariants d'une surface réglée à l'étude du mouvement d'un corps solide assujetti à cinq conditions. Cette étude a déjà été faite à un autre point de vue par divers auteurs et entre autres par MM. Résal et Thévenet; le premier dans son *Traité de Cinématique pure* et dans divers mémoires publiés dans le *Journal de l'École Polytechnique* ; le second dans sa thèse.

On sait que le mouvement d'un corps solide assujetti à cinq conditions peut s'obtenir en faisant rouler et glisser une surface réglée sur une autre surface réglée. Il semble donc naturel d'étudier ce mouvement au moyen des invariants des deux surfaces ; le nombre de ces invariants distincts est d'ailleurs égal à cinq, parce que le paramètre de distribution est le même, et cette façon de procéder présente l'avantage de donner un sens bien net aux éléments du mouvement. J'ai donc calculé de cette manière les éléments infinitésimaux d'ordres 1, 2 et 3 du mouvement. Toute cette partie était du reste bien connue, sauf cette remarque importante *qu'il faut aller jusqu'aux infiniment petits du troisième ordre pour caractériser complètement le mouvement*; de sorte que deux mouvements non identiques peuvent se correspondre de façon que les infiniment petits d'ordres 1 et 2 soient identiques.

Comme problèmes nouveaux traités dans cette deuxième partie et en outre de ceux que je signalerai plus loin, je dois citer les suivants :

Calcul des invariants des surfaces réglées engendrées par les droites du corps solide et mouvement du trièdre attaché à une surface réglée. Ces problèmes ont été traités dans les paragraphes III et IV.

En particulier, dans le § IV je montre que le mouvement du trièdre invariable attaché à une surface réglée s'obtient en faisant rouler et glisser un conoïde droit sur une surface réglée. Je montre en outre dans ce paragraphe :

1° *Que si la ligne de striction de la surface donnée est ligne de courbure de cette surface, le mouvement s'obtient par le roulement, avec glissement, d'un conoïde droit sur un lieu de binormales ;*

2° *Que si la ligne de striction est ligne asymptotique, le mouvement s'obtient par le roulement, avec glissement, d'un plan sur une surface développable.*

J'ai eu surtout en vue, dans la deuxième partie, un certain nombre de problèmes analogues aux problèmes des roulettes dans le plan, problèmes qui n'avaient pas encore été abordés jusqu'ici et dont voici les énoncés :

Problème I. — *On donne la base et la trajectoire d'un point, trouver la roulette.*

Problème II. — *On donne le cône directeur de la base et les trajectoires des deux points du corps, trouver la base et la roulette.*

Problème III. — *Connaissant la base et la surface engendrée par une droite du corps, trouver la roulette.*

La solution du problème I s'obtient en intégrant une équation de Riccati ; cette équation une fois intégrée, on en déduit le cône directeur de la roulette *et il est remarquable que le problème s'achève alors sans quadratures.*

La solution du problème II résulte aussi de l'intégration d'une équation de Riccati *dont on connaît une solution*, et on achève encore sans quadratures. Ce problème est analogue au problème suivant de géométrie plane : *Connaissant la base et la trajectoire d'un point, trouver la roulette.* On connaît en effet les trajectoires de deux points dont l'un est le point à l'infini sur la perpendiculaire au plan de la base.

Quant au problème III, il n'est possible que *si les normales à la surface donnée le long de la ligne de striction rencontrent à angle droit les génératrices de la base.* Mais si cette condition est remplie, le problème s'achève sans quadratures.

Ces exemples montrent comment on pourrait résoudre des problèmes analogues, et pour donner un exemple de la manière de procéder, dans tous ses détails, je termine ce travail en traitant complètement le problème I, dans un cas particulier : les calculs en sont développés dans le § VI de la deuxième partie.

PREMIÈRE PARTIE

ÉTUDE DES SURFACES RÉGLÉES

§ 1. — Définition des invariants d'une surface réglée

1. **Rappel de quelques formules importantes.** — Je commence par rappeler quelques formules dont j'aurai à faire souvent usage. Je considère un système invariable mobile dans l'espace et j'appelle (A.XYZ) un trièdre trirectangle invariablement lié au système. La position de ce système sera connue à chaque instant si l'on connaît la position du point A ainsi que les cosinus des angles que font les arêtes du trièdre (A.XYZ) avec un trièdre fixe (O.xyz).

Je déterminerai ces cosinus, qui seront des fonctions du temps t, par le tableau suivant :

	X	Y	Z
x	α	α_1	α_2
y	β	β_1	β_2
z	γ	γ_1	γ_2

Soient ξ, η, ζ les composantes, à l'instant t, de la vitesse du point A par rapport aux axes mobiles ; p, q, r celles de la rotation. Si l'on considère un point dont les coordonnées relatives sont X, Y, Z, les composantes de sa vitesse absolue par

rapport aux axes mobiles sont données par les formules suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} V_X = \xi + qZ - rY + \dfrac{dX}{dt}, \\ V_Y = \eta + rX - pZ + \dfrac{dY}{dt}, \\ V_Z = \zeta + pY - qX + \dfrac{dZ}{dt}. \end{cases}$$

Les rotations p, q, r sont d'ailleurs liées aux neuf cosinus par les trois groupes de relations :

$$(2)\ \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dt} = r\alpha_1 - q\alpha_2, \\ \dfrac{d\alpha_1}{dt} = p\alpha_2 - r\alpha, \\ \dfrac{d\alpha_2}{dt} = q\alpha - p\alpha_1; \end{cases} \quad (3)\ \begin{cases} \dfrac{d\beta}{dt} = r\beta_1 - q\beta_2, \\ \dfrac{d\beta_1}{dt} = p\beta_2 - r\beta, \\ \dfrac{d\beta_2}{dt} = q\beta - p\beta_1; \end{cases} \quad (4)\ \begin{cases} \dfrac{d\gamma}{dt} = r\gamma_1 - q\gamma_2, \\ \dfrac{d\gamma_1}{dt} = p\gamma_2 - r\gamma, \\ \dfrac{d\gamma_2}{dt} = q\gamma - p\gamma_1. \end{cases}$$

Pour plus de détails sur ce sujet, je renvoie aux *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, de M. Darboux.

2. **Trièdre attaché à une surface réglée.** — Ces formules étant rappelées, je suppose que AX soit une génératrice d'une surface réglée S et que A soit le point central sur cette génératrice ; je suppose enfin que le plan YAX soit le plan asymptote à la surface suivant la génératrice AX, de sorte que AZ sera la normale au plan asymptote menée par le point central.

Le trièdre ainsi défini sera appelé *le trièdre attaché à la surface réglée* S ; on verra dans la suite comment il se prête à l'étude de cette surface.

3. **Détermination de** p, q, r. — Voyons d'abord comment les éléments du mouvement de ce trièdre se rattachent à ceux de la surface. Imaginons pour cela que l'on mène par le point O la parallèle à AX et que l'on prenne sur cette parallèle la longueur $OM = 1$; quand AX se déplace sur S, OM engendre le cône directeur de cette surface et le point M décrit sa représentation sphérique (σ) ; on sait d'ailleurs que le plan tangent au cône directeur suivant OM est parallèle au plan YAX et que AY est parallèle à la tangente en M à la représentation sphérique (σ), de sorte que l'on a

$$(5)\qquad \frac{d\alpha}{d\sigma} = \alpha_1, \qquad \frac{d\beta}{d\sigma} = \beta_1, \qquad \frac{d\gamma}{d\sigma} = \gamma_1,$$

σ désignant l'arc de cette représentation sphérique.

On peut supposer que l'arc σ soit égal au temps, et c'est ce que nous supposerons toujours à l'avenir ; la comparaison des formules (2) et (5) donne alors immédiatement

$$q = 0, \qquad r = 1,$$

c'est-à-dire deux des composantes de la rotation. Nous poserons

$$p = -\theta.$$

4. Signification géométrique de θ. — Pour avoir la signification géométrique de θ nous remarquerons d'abord que l'on a, en vertu de (2), (3) et (4),

$$\text{(6)} \qquad \frac{d\alpha_2}{dt} = \theta\alpha_1, \qquad \frac{d\beta_2}{dt} = \theta\beta_1, \qquad \frac{d\gamma_2}{dt} = \theta\gamma_1.$$

Cela posé, soient OM (*fig.* 1) une génératrice du cône directeur de la surface et ON la normale au cône menée par le point O ; supposons que OM = ON = 1 ;

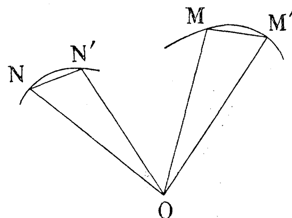


Fig. 1

les coordonnées du point M sont α, β, γ et celles de N, α_2, β_2, γ_2. A un déplacement infiniment petit MM′ du point M correspond un déplacement infiniment petit $NN' = dS$ du point N et qui mesure l'angle des plans tangents au cône suivant les deux génératrices infiniment voisines OM et OM′ ; on a de plus

$$dS = \sqrt{d\alpha_2^2 + d\beta_2^2 + d\gamma_2^2},$$

et d'autre part, à cause de (6),

$$\sqrt{d\alpha_2^2 + d\beta_2^2 + d\gamma_2^2} = \theta dt;$$

on en conclut

$$\theta = \frac{dS}{dt}.$$

Or, $dt = MM'$ mesure l'angle de OM avec OM' ; on voit donc que θ *représente le rapport de l'angle de deux plans tangents infiniment voisins à l'angle des deux génératrices de contact dans le cône directeur de la surface*. C'est encore, si l'on veut, la courbure géodésique de la représentation sphérique de la surface.

5. **Interprétation des valeurs particulières de** θ. — D'après cela :

1° Si $\theta = 0$, l'indicatrice sphérique de la surface est un grand cercle ; car les relations (6) donnent alors

$$\alpha_2 = C^{te}, \qquad \beta_2 = C^{te}, \qquad \gamma_2 = C^{te} ;$$

par suite la surface réglée est une surface à plan directeur ;

2° Si θ est constant, l'indicatrice sphérique est un petit cercle ; en effet, le point dont les coordonnées sont

$$u = \theta\alpha - \alpha_2,$$
$$v = \theta\beta - \beta_2,$$
$$w = \theta\gamma - \gamma_2$$

est un point fixe, car on a

$$\frac{du}{dt} = \theta\alpha_1 - \theta\alpha_1 = 0, \quad \text{etc.};$$

de plus, si l'on appelle V l'angle que fait la direction α, β, γ avec la direction u, v, w, on a

$$\cos V = \frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}},$$

de sorte que l'angle V est constant ; il suit bien de là que l'indicatrice sphérique est un petit cercle et par suite que le cône directeur de la surface est de révolution.

6. **Expressions en fonction de** θ **de la courbure et de la torsion de la représentation sphérique de la surface.** — On peut du reste exprimer en fonction de θ tous les éléments de l'indicatrice sphérique de la surface réglée. Soit en effet M (*fig.* 2) un point de l'indicatrice sphérique (σ) de la surface et soient ρ et τ les rayons de courbure et de torsion de (σ) en M. Pour avoir ρ on remarque que la vitesse du

point M est égale à l'unité et, comme elle est constante, l'accélération totale se réduit à l'accélération normale, c'est-à-dire à $\frac{1}{\rho}$ puisque $V = 1$; d'autre part les

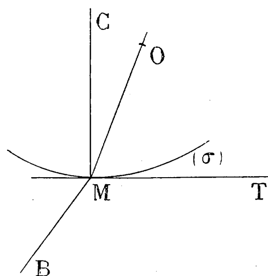


Fig. 2

composantes de l'accélération totale sont $\frac{d\alpha_1}{dt}$, $\frac{d\beta_1}{dt}$, $\frac{d\gamma_1}{dt}$; or, les relations (2), (3) et (4) donnent

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = -\alpha - \theta\alpha_2, \quad \text{etc.};$$

on en conclut immédiatement

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{1 + \theta^2},$$

ce qui définit le rayon de courbure.

Pour avoir le rayon de torsion, menons la tangente MT, la normale principale MC et la binormale MB à l'indicatrice sphérique. Les cosinus directeurs de MT sont $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; appelons a_1, b_1, c_1 ceux de MC et a_2, b_2, c_2 ceux de MB ; on a évidemment

$$(7) \qquad \frac{da_2}{dt} = \frac{1}{\tau} a_1$$

et deux autres relations analogues qu'il est inutile d'écrire. Cherchons les expressions de a_1, b_1, c_1 ainsi que celles de a_2, b_2, c_2. Pour avoir a_1, b_1 et c_1, il suffit d'observer que MC est la direction de l'accélération totale du point M, de sorte que l'on a pour a_1 par exemple

$$(8) \qquad a_1 = \frac{\alpha + \theta\alpha_2}{\sqrt{1 + \theta^2}}.$$

On obtient facilement alors a_2, b_2, c_2 en remarquant que MB est perpendicu-

laire à MT et à MC, ce qui conduit à

$$a_2 = \frac{\theta\alpha - \alpha_2}{\sqrt{1+\theta^2}}, \quad \text{etc.};$$

on tire de là, après réduction des calculs,

$$\frac{da_2}{dt} = \frac{\alpha + \theta\alpha_2}{\sqrt{1+\theta^2}} \cdot \frac{\theta'}{1+\theta^2}; \tag{9}$$

la comparaison des relations (7), (8) et (9) donne alors

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\theta'}{1+\theta^2}.$$

7. **Remarque.** — On voit d'après cela que si θ est connu en fonction de t, la courbure et la torsion de l'indicatrice sphérique seront connues en fonction de l'arc, et par suite l'indicatrice sphérique sera complètement déterminée de forme ; on connaîtra donc aussi le cône directeur de la surface réglée. La détermination complète de ce cône est du reste identique à la détermination du mouvement d'un trièdre parallèle au trièdre (A.XYZ) et ayant pour sommet l'origine des axes fixes ; et, puisque l'on a

$$p = -\theta, \qquad q = 0, \qquad r = 1,$$

les neuf cosinus directeurs des arêtes de ce trièdre s'obtiendront en intégrant l'équation de Riccati :

$$\frac{du}{dt} = -iu + \frac{i\theta}{2}(1-u^2). \tag{10}$$

8. **Vitesse du point central.** — Pour achever de définir le mouvement du trièdre (A.XYZ), il nous reste à trouver la vitesse du point central ; elle est évidemment située dans le plan ZAX, de sorte que sa composante suivant AY est nulle. J'appelle alors h et k ses composantes suivant AX et suivant AZ ; nous verrons plus loin comment h se rattache à certains éléments essentiels de la surface ; mais nous pouvons dès à présent donner la signification géométrique de k. A cet effet, soit λ l'abscisse d'un point I sur AX ; les composantes de la vitesse de ce point suivant les axes mobiles sont respectivement

$$h + \frac{d\lambda}{d\sigma}, \qquad \lambda, \qquad k.$$

La relation de Chasles relative à la génératrice AX est donc

$$u = \frac{k}{\lambda};$$

il en résulte que *k n'est autre chose que le paramètre de distribution des plans tangents à la surface suivant* AX.

Je remarque d'ailleurs, parce que j'aurai souvent à m'en servir, que h *et* k *sont, par définition même, les quotients par* dt *des composantes suivant la génératrice* AX *et suivant la normale* AZ *au plan asymptote du déplacement du point central*, dt *désignant la différentielle de l'arc d'indicatrice sphérique de la surface.*

9. **Les invariants d'une surface réglée.** — En résumé, le déplacement du trièdre (A.XYZ) attaché à une surface réglée dépend de trois fonctions de t : θ, h et k. J'appellerai ces trois fonctions *les invariants de la surface* ; ce sont des invariants métriques, de même que le rayon de courbure et le rayon de torsion sont les invariants d'une courbe gauche. Une courbe gauche est complètement définie de forme dès que l'on connaît le rayon de courbure et le rayon de torsion considérés comme fonctions de l'arc; pareillement, si l'on connaît h, k et θ en fonction de l'arc d'indicatrice sphérique, la surface réglée est complètement définie de forme. La détermination complète de la surface se ramène à la résolution de deux problèmes : le premier a pour objet la détermination du cône directeur, et la solution est fournie par l'intégration d'une équation de Riccati (7) ; l'intégration de cette équation fait connaître les neuf cosinus directeurs du trièdre (A.XYZ) en fonction de t ; on en déduit ensuite par des quadratures les équations de la ligne de striction rapportée au trièdre fixe. Ces équations sont

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \int (h\alpha + k\alpha_2)\,dt, \\ y &= \int (h\beta + k\beta_2)\,dt, \\ z &= \int (h\gamma + k\gamma_2)\,dt, \end{aligned}\right.$$

et par suite les équations de la surface rapportée aux mêmes axes seront

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \int (h\alpha + k\alpha_2)\,dt + \alpha\rho, \\ y &= \int (h\beta + k\beta_2)\,dt + \beta\rho, \\ z &= \int (h\gamma + k\gamma_2)\,dt + \gamma\rho. \end{aligned}\right.$$

10. **Contact de deux surfaces réglées qui ont une génératrice commune.** — Pour donner dès maintenant une application des invariants d'une surface réglée, propo-

sons-nous de chercher les conditions pour que deux surfaces réglées ayant une génératrice commune aient un contact d'ordre n suivant cette génératrice. Rapportons pour cela les deux surfaces à un trièdre fixe (O.xyz) et soit (A.XYZ) le trièdre attaché à la première et dont les neuf cosinus ont été définis au début ; soient enfin :

x, y, z les coordonnées absolues du point central A ;

A, B, C les moments de AX par rapport aux axes fixes ;

A_1, B_1, C_1 ceux de AY ;

A_2, B_2, C_2 ceux de AZ.

On a

$$\begin{aligned} A &= \beta z - \gamma y, & A_1 &= \beta_1 z - \gamma_1 y, & A_2 &= \beta_2 z - \gamma_2 y, \\ B &= \gamma x - \alpha z, & B_1 &= \gamma_1 x - \alpha_1 z, & B_2 &= \gamma_2 x - \alpha_2 z, \\ C &= \alpha y - \beta x; & C_1 &= \alpha_1 y - \beta_1 x; & C_2 &= \alpha_2 y - \beta_2 x. \end{aligned}$$

Supposons que AX soit la génératrice commune aux deux surfaces; pour qu'elles présentent un contact du premier ordre suivant cette génératrice, il faut qu'une seconde génératrice commune vienne coïncider avec AX. Si l'on appelle t' l'arc d'indicatrice sphérique de la seconde surface, on voit d'abord que l'on doit avoir

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha'}{dt'}, \quad \text{etc.},$$

bien entendu pour les valeurs de t et de t' qui correspondent à la génératrice commune ; de sorte que les trièdres attachés aux deux surfaces doivent coïncider, mais alors on a

$$\frac{dA}{dt} = A_1 + k(\beta\gamma_2 - \gamma\beta_2) = A_1 - k\alpha_1, \quad \text{etc.},$$

ce qui montre que les deux surfaces doivent avoir le même paramètre de distribution suivant AX.

En différentiant une seconde fois, on obtient de même

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d\alpha_1}{dt} = -(\alpha + \theta\alpha_2),$$

$$\frac{d^2A}{dt^2} = \frac{dA_1}{dt} + k(\alpha + \theta\alpha_2) - \alpha_1\frac{dk}{dt},$$

et d'autres formules analogues ; ce qui montre tout d'abord que pour qu'il y ait contact du second ordre, il faut en premier lieu que les invariants θ soient les mêmes.

D'autre part, on a

$$\frac{dA_1}{dt} = -A - \theta A_2 - h\alpha_2 + k\alpha,$$

d'où il résulte

$$\frac{d^2A}{dt^2} = -A - \theta A_2 + 2k\alpha - \alpha_1 \frac{dk}{dt} + (\theta k - h)\alpha_2,$$

et par suite qu'il faut en outre, pour qu'il y ait contact du second ordre, que h, k et $\frac{dk}{dt}$ soient les mêmes.

On peut évidemment continuer ainsi, et l'on voit que le contact d'ordre n sera exprimé :

par l'égalité des invariants θ et de leurs $(n-2)$ premières dérivées ;
par l'égalité des invariants h et de leurs $(n-2)$ premières dérivées ;
par l'égalité des invariants k et de leurs $(n-1)$ premières dérivées.

11. **Interprétation des valeurs remarquables des invariants.** — Cherchons maintenant la nature de la surface réglée qui correspond à des valeurs particulières des invariants. Nous avons déjà étudié la nature de la surface lorsque θ est nul ou constant ; examinons les autres cas :

1° Si $k = 0$, la vitesse du point central est dirigée suivant la génératrice, donc la surface est développable ; en outre, par définition, h est alors le rapport de l'arc infiniment petit décrit par le point A à l'angle de deux génératrices infiniment voisines ; par suite h représente le rayon de courbure de l'arête de rebroussement ;

2° Si $h = 0$ et $k \neq 0$, le déplacement du point A est tangent à l'axe AZ ; de plus on a

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = \theta\alpha_1, \qquad \frac{d\beta_2}{dt} = \theta\beta_1, \qquad \frac{d\gamma_2}{dt} = \theta\gamma_1 ;$$

il en résulte que AY est la normale principale en A à la ligne de striction, par conséquent AX est la binormale ; donc la surface engendrée par AX est un lieu de binormales. Enfin, si l'on appelle x, y, z les coordonnées absolues du point A, les composantes de la vitesse de ce point suivant les axes fixes sont

$$\frac{dx}{dt} = k\alpha_2, \qquad \frac{dy}{dt} = k\beta_2, \qquad \frac{dz}{dt} = k\gamma_2,$$

ce qui montre que k est le rayon de torsion de la ligne de striction ;

3° Si l'on a en même temps $\theta = 0$, $k \neq 0$, et $h \neq 0$, la surface est une surface à plan directeur (5) ; k représente la dérivée par rapport à l'arc de la représentation sphérique, de l'élévation de la génératrice par rapport au plan directeur. Pour avoir la signification de h dans ce cas on remarque que la développable circonscrite à la surface le long de la ligne de striction est un cylindre perpendiculaire au plan directeur, et l'on voit alors que h représente le rayon de courbure de la section droite de ce cylindre ;

4° Si $\theta = 0$, $k = 0$ et $h \neq 0$, la surface est formée par les tangentes à une courbe plane et h est le rayon de courbure de cette courbe ;

5° Si $\theta = 0$, $h = 0$ et $k \neq 0$, on voit sans difficulté que la surface est un conoïde droit ; quant à la signification de k, elle est connue en vertu de 3° ;

6° Nous allons montrer enfin que si h, k et θ sont constants, la surface est un hélicoïde. A cet effet proposons-nous de calculer les invariants d'un hélicoïde ayant

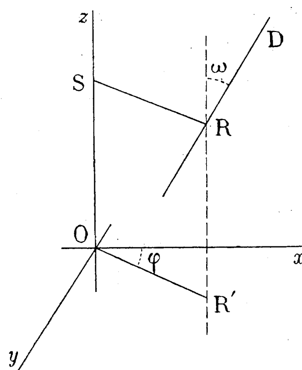


Fig. 3

pour axe Oz (*fig.* 3). Soient Ox et Oy deux axes rectangulaires quelconques perpendiculaires à Oz et D une position de la génératrice ; soit $SR = a$ la plus courte distance de D et de Oz ; appelons ω l'angle constant de D avec Oz, et φ l'angle de OR' avec Ox ; les coordonnées du point R sont

$$(13) \qquad \begin{cases} x = a \cos \varphi, \\ y = a \sin \varphi, \\ z = m\varphi, \quad m \text{ désignant une constante.} \end{cases}$$

Si l'on conserve pour le trièdre attaché à l'hélicoïde les notations du n° 1, on a

$$\alpha = - \sin \omega \sin \varphi,$$
$$\beta = \sin \omega \cos \varphi,$$
$$\gamma = \cos \omega,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -\sin\omega\cos\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \qquad -\sin\omega\sin\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = 0.$$

Il suit de là que l'on a $dt = \sin\omega\, d\varphi$, et par suite

$$\alpha_1 = -\cos\varphi,$$

$$\beta_1 = -\sin\varphi,$$

$$\gamma_1 = 0.$$

On en conclut

$$\alpha_2 = \cos\omega\sin\varphi,$$

$$\beta_2 = -\cos\omega\cos\varphi,$$

$$\gamma_2 = \sin\omega.$$

De là résulte immédiatement la valeur de θ donnée par la formule

$$\theta = \frac{1}{\alpha_1}\frac{d\alpha_2}{dt} = -\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\cos\omega\cos\varphi}{\sin\omega}.$$

ou

$$\theta = -\operatorname{cotg}\omega.$$

Pour avoir h et k, cherchons la vitesse du point R ; en différentiant les équations (13), on obtient

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{a\sin\varphi}{\sin\omega},$$

$$\frac{dy}{dt} = a\frac{\cos\varphi}{\sin\omega},$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{m}{\sin\omega}.$$

On vérifie sans difficulté qu'elle est perpendiculaire à la direction α_1, β_1, γ_1,

ce qui montre en passant que le point R est le point central. Projetons alors successivement sur D et sur la direction α_2, β_2, γ_2 et nous aurons (8) h et k. On trouve

$$h = a + m \operatorname{cotg} \omega,$$

$$k = -a \operatorname{cotg} \omega + m.$$

Or ω, a et m sont constants, donc *dans l'hélicoïde les trois invariants sont constants.*

La réciproque résulte de ce que la surface est définie dès que l'on se donne θ, h et k.

Si en particulier l'hélicoïde est un hyperboloïde, m est nul et il reste

$$h = a, \qquad k = -a \operatorname{cotg} \omega,$$

d'où l'on conclut

$$k = \theta h.$$

Nous verrons plus loin que cette relation entre les invariants caractérise les surfaces réglées dont la ligne de striction est en même temps ligne de courbure.

12. Relations entre les invariants d'une surface réglée et les coordonnées d'un point fixe par rapport au trièdre attaché à la surface. — Je terminerai ce chapitre en donnant des relations utiles entre les invariants et les coordonnées d'un point fixe rapporté au trièdre mobile. Soient ξ, η, ζ ces coordonnées ; les relations cherchées s'obtiennent en exprimant que la vitesse absolue du point est nulle, ce qui donne

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\xi}{dt} + h - \eta = 0, \\ &\frac{d\eta}{dt} + \xi + \theta\zeta = 0, \\ &\frac{d\zeta}{dt} + k - \theta\eta = 0. \end{aligned} \right.$$

§ II. — Relations entre une surface réglée et sa développable asymptote ; surface conjuguée de M. Paul Serret.

13. Développable asymptote. — La développable asymptote à une surface réglée est l'enveloppe du plan YAX. Soient x_1, y_1, les coordonnées relatives d'un point de ce plan ; les composantes, suivant les axes mobiles de la vitesse de ce

point, ont pour expressions (1)

$$V_X = \frac{dx_1}{dt} + h - y_1,$$

$$V_Y = \frac{dy_1}{dt} + x_1,$$

$$V_Z = \qquad k - \theta y_1.$$

Pour qu'il soit un point de l'arête de rebroussement de la développable asymptote, il faut et il suffit que sa vitesse soit dirigée suivant AX, c'est-à-dire par suite que l'on ait

$$k - \theta y_1 = 0, \qquad y_1 = \frac{k}{\theta};$$

d'où

$$x_1 + \frac{dy_1}{dt} = 0, \qquad x_1 = -\frac{dy_1}{dt}.$$

La première de ces relations montre que la distance d'une génératrice d'une surface réglée à la génératrice correspondante de la développable asymptote est égale au quotient des invariants k *et* θ. Dans tout ce qui suit, cette distance, d'ailleurs affectée d'un signe, sera désignée par l, de sorte que nous aurons la formule

$$k = \theta l.$$

Si l'on appelle ρ et τ les rayons de courbure et de torsion de l'arête de rebroussement au point $(x_1, y_1, 0)$, comme le trièdre attaché à la développable asymptote est parallèle à $(A.xyz)$ et de même sens que lui, on a

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = \alpha_1 \frac{\rho}{\tau};$$

donc

$$\theta = \frac{\rho}{\tau},$$

et par suite

$$k = l\frac{\rho}{\tau}.$$

La seconde relation montre que *l'abscisse du point de contact de la génératrice de la développable asymptote avec l'arête de rebroussement est égale et de signe contraire à la dérivée de* l *par rapport à l'arc d'indicatrice sphérique.*

Il y a lieu de chercher la signification de la composante de la vitesse suivant la

génératrice ; il est visible qu'elle représente le rayon de courbure de l'arête de rebroussement, de sorte que l'on a

$$\rho = \frac{dx_1}{dt} + h - l,$$

c'est-à-dire

$$\rho = h - l - \frac{d^2 l}{dt^2};$$

d'après cela, pour que la développable asymptote soit un cône, il faut et il suffit que l'on ait

$$h - l - \frac{d^2 l}{dt^2} = 0.$$

Je vais indiquer quelques conséquences de ces résultats.

14. Un mode de génération des surfaces réglées dépourvues de plan directeur. — Occupons-nous d'abord de la formule

$$k = \theta l,$$

qui établit une correspondance entre une surface réglée et sa développable asymptote ; elle conduit immédiatement au mode de génération suivant d'une surface réglée dépourvue de plan directeur :

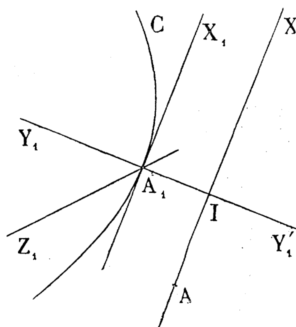


Fig. 4.

Soit C (*fig. 4*) une courbe gauche quelconque. Prenons sur cette courbe un point quelconque A_1 et construisons le trièdre $(A_1.X_1Y_1Z_1)$ formé par la tangente A_1X_1, la normale principale A_1Y_1 et la binormale A_1Z_1 ; soit A_1Y_1 la direction de la normale principale dirigée vers le centre de courbure et soit enfin I un point de la normale principale d'ordonnée l, fonction de l'arc de la courbe C compté à

partir d'une origine arbitraire, ou mieux encore, fonction de l'arc t de la représentation sphérique de cette courbe. Si l'on mène par le point I la parallèle IX à A_1X_1, la droite IX, lorsque A_1 parcourt la courbe C, c'est-à-dire lorsque t varie, engendre une surface réglée dont la développable asymptote a pour arête de rebroussement la courbe C. Si l'on appelle θ le rapport des deux courbures de la courbe C, le paramètre de distribution de la surface réglée est lié à θ et à l par la relation

$$k = -\theta l.$$

La construction subsiste si la courbe C se réduit à un point, c'est-à-dire si la développable dont elle est l'arête de rebroussement est un cône ; dans ce cas le trièdre $(A_1.X_1Y_1Z_1)$ devient le trièdre attaché au cône et A_1 le sommet du cône.

La formule

$$x_1 = -\frac{dy_1}{dt}$$

nous montre alors que dans les deux cas l'abscisse du point central par rapport au point I est donnée par l'expression

$$\frac{dl}{dt}.$$

On voit en particulier que si l'ordonnée l est constante, l'abscisse du point central sera nulle, donc :

Si sur les normales principales A_1Y_1 *à une courbe gauche on porte, à partir du point* A_1, *une longueur constante* AI, *dans un sens ou dans l'autre, la parallèle* IX *menée par le point* I *à la tangente en* A_1 *à la courbe gauche engendre une surface réglée dont la ligne de striction est le lieu du point* I.

On voit sans difficulté ce que devient cette proposition lorsque la courbe C est remplacée par un cône.

Dans les deux cas, si l'on suppose que la longueur l soit quelconque et si l'on appelle ξ, η, ζ les coordonnées absolues du point A_1, celles du point central sont

$$x = \xi - l'\alpha + l\alpha_1,$$
$$y = \eta - l'\beta + l\beta_1,$$
$$z = \zeta - l'\gamma + l\gamma_1,$$

où l'on a posé $\frac{dl}{dt} = l'$; dans le cas du cône, ξ, η et ζ sont constants, et on peut les supposer nuls si le sommet du cône est à l'origine.

Il est bon de remarquer que si A est le point central sur IX, on a

$$\overline{A_1A}^2 = l^2 + \left(\frac{dl}{dt}\right)^2;$$

de sorte que si A_1A est constante et égale à a, on a

$$l = a \sin(t + C);$$

d'autre part, si l'on appelle φ l'angle de A_1A avec A_1Y, on a aussi

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(t + C),$$

et par suite

$$\varphi - t = C^{te},$$

résultat intéressant en ce sens qu'il ne dépend pas de la forme de la développable. — Si en particulier la développable est un cône, le point A *décrit une ligne sphérique* ; de plus la relation

$$\rho = h - l - \frac{d^2l}{dt^2}$$

devient dans ce cas, puisque $\rho = 0$,

$$h = l + \frac{d^2l}{dt^2} = 0;$$

donc la surface est un lieu de binormales (11). Réciproquement, si une surface réglée est un lieu de binormales à une courbe sphérique, le plan asymptote étant perpendiculaire à la tangente à la ligne de striction passe par le centre de la sphère et par suite la développable asymptote est un cône.

Une surface réglée de cette espèce est définie, en coordonnées absolues, par les équations

$$x = a(\alpha_1 \sin t - \alpha \cos t) + \lambda\alpha,$$

$$y = a(\beta_1 \sin t - \beta \cos t) + \lambda\beta,$$

$$z = a(\gamma_1 \sin t - \gamma \cos t) + \lambda\gamma.$$

15. Construction des surfaces réglées qui ont un paramètre donné. — Le mode de génération d'une surface réglée défini dans le numéro précédent conduit à une construction intéressante des surfaces réglées dont le paramètre est une fonction donnée de t. Supposons en effet que dans la formule

$$k = -\theta l,$$

k soit une fonction connue de t et portons sur la normale principale à une courbe gauche quelconque C (*fig.* 5) une longueur l définie par

$$l = -\frac{k}{\theta};$$

puis par le point I ainsi obtenu menons la parallèle à A_1X_1. Lorsque A_1 parcourt la courbe C, la droite IX engendre une surface réglée répondant à la question.

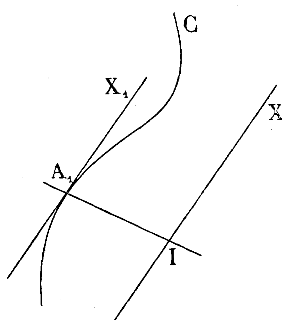


Fig. 5

On pourrait procéder de même si, au lieu de partir d'une courbe gauche, on partait d'un cône.

Cette construction équivaut à une véritable intégration. Un cas particulier remarquable est celui où le paramètre de distribution est constant.

16. **Expression des invariants d'une surface réglée au moyen des éléments de la développable asymptote.** — Après avoir montré comment on peut construire une surface réglée connaissant la développable asymptote, il y a lieu de chercher les expressions des invariants de la surface au moyen des éléments de la développable asymptote. Ces expressions résultent des formules

$$k = -\theta l,$$
$$\rho = h + l + \frac{d^2 l}{dt^2},$$

dans lesquelles l est comptée à partir de l'arête de rebroussement. On en déduit

$$h = \rho - l - \frac{d^2 l}{dt^2}.$$

Dans ces expressions il reste une fonction arbitraire l; cela tient à ce qu'il y a une infinité de surfaces réglées ayant une développable asymptote donnée.

17. **Remarque.** — La correspondance entre une surface réglée et sa développable asymptote ramène certains problèmes sur les surfaces réglées à des problèmes sur les courbes gauches.

18. **Surface conjuguée de M. P. Serret.** — Soit (A.XYZ) le trièdre attaché à une surface réglée S dont θ, h et k sont les invariants; M. P. Serret a appelé *surface conjuguée* de S celle qui est engendrée par AZ. Cherchons les invariants θ_1, h_1 et k_1 de cette surface S_1 en fonction de θ, h et k; pour cela, il faut d'abord chercher l'arc σ de la représentation sphérique de S_1. A cet effet, imaginons la parallèle de longueur 1 menée à AZ par l'origine O des axes fixes; si l'on projette sur AX le déplacement de l'extrémité de cette longueur, on obtient $\alpha_1 d\sigma$; mais d'autre part cette projection est $d\alpha_2$, et l'on a

$$d\alpha_2 = \theta\alpha_1 dt;$$

il en résulte par comparaison

$$d\sigma = \theta dt;$$

mais on voit de plus que ce déplacement est parallèle à AY, de sorte que le plan asymptote de S_1 est le plan YAZ, et par suite ZAX est le plan tangent au point central; or, la vitesse du point A est dans le plan ZAX; donc le point A est aussi le point central de la surface conjuguée.

Cela posé, puisque AX est la normale au plan asymptote de S_1, on a

$$\theta_1 = \frac{1}{\alpha_1}\frac{d\alpha}{d\sigma};$$

mais

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} = \frac{d\alpha}{dt}\cdot\frac{dt}{d\sigma} = \alpha_1\cdot\frac{1}{\theta},$$

donc

$$\theta_1 = \frac{1}{\theta},$$

ce qui donne la valeur de l'invariant θ_1. Pour avoir h_1 et k_1, il faut diviser par $d\sigma$ les composantes suivant AZ et AX du déplacement du point A. Or, ces compo-

santes sont respectivement kdt et hdt ; on aura donc

$$h_1 = \frac{kdt}{\theta dt} = \frac{k}{\theta},$$

$$k_1 = \frac{hdt}{\theta dt} = \frac{h}{\theta},$$

formules qui mettent bien en évidence la réciprocité des deux surfaces S et S_1.

La considération des surfaces conjuguées peut avoir une certaine utilité. Ainsi, par exemple, il peut arriver que la développable asymptote de S_1 soit un cône ; nous avons vu alors comment la surface S_1 peut être déduite de ce cône, et cela permet également de construire la surface S. Au reste les surfaces S et S_1 interviennent tout naturellement dans certaines questions, ainsi qu'on le verra dans le § suivant.

§ III. — Sur une transformation de l'espace réglé

19. **Définition de la transformation.** — Soit D une droite quelconque sur laquelle on a fixé un sens positif et soit O un point fixe (*fig.* 6); par le point O je mène la parallèle D′ à D et je fais tourner D de 90° autour de D′ dans un sens

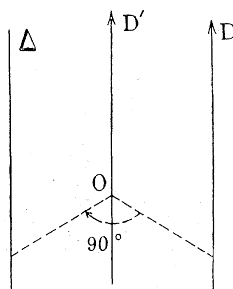


Fig. 6

convenu, ce qui l'amène en Δ ; de cette façon, à toute droite D il correspond une droite parallèle Δ, et à toute figure composée de droites, une autre figure composée de droites respectivement parallèles. On a donc défini ainsi une transformation de l'espace réglé ; le point O sera appelé le pôle. Je vais indiquer quelques propriétés remarquables de cette transformation, ce qui montrera par cela même le parti que l'on peut tirer de la considération des invariants d'une surface réglée.

Dans une note insérée aux *Comptes Rendus* (*), M. Guichard a donné une transformation des figures en vertu de laquelle à toute congruence de normales il correspond une congruence dont la *surface moyenne* est un plan. On verra que la transformation définie plus haut change toute congruence de normales dont l'*enveloppée moyenne* (**) est un point en une autre congruence de même nature.

20. **Application aux surfaces réglées.** — Soient AX (*fig.* 7) une génératrice d'une surface réglée R et (A.XYZ) le trièdre attaché à la surface. Je suppose en outre la surface rapportée à un trièdre fixe (O.xyz) de sommet O et soit (O.X'Y'Z') le trièdre

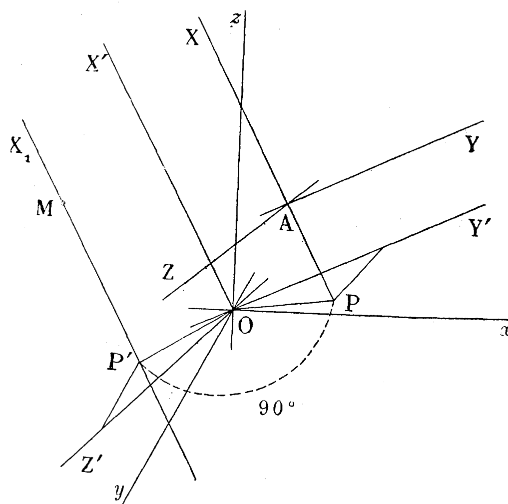


Fig. 7

de même sommet parallèle au trièdre (A.XYZ) et de même sens que lui. D'après la définition du trièdre attaché à une surface réglée, A est le point central de cette surface; j'appelle ξ, η, ζ ses coordonnées par rapport au trièdre (O.X'Y'Z'). J'appelle enfin, par rapport au trièdre fixe :

α, β γ les cosinus directeurs de AX;

α_1, β_1, γ_1 ceux de AY;

α_2, β_2, γ_2 ceux de AZ;

et enfin x, y, z les coordonnées du point A.

(*) Numéro du 28 mars 1892.

(**) Voir plus loin (21) les définitions de la surface moyenne et de l'enveloppée moyenne d'une congruence.

Je suppose toutes ces quantités fonctions de l'arc t de la représentation sphérique de R, et j'appelle θ, h et k les invariants de cette surface.

Cela posé, il est évident que l'on a

$$x = \alpha\xi + \alpha_1\eta + \alpha_2\zeta,$$

et des expressions analogues pour y et pour z; on en déduit

$$\frac{dx}{dt} = \alpha\left(\frac{d\xi}{dt} - \eta\right) + \alpha_1\left(\frac{d\eta}{dt} + \xi + \theta\zeta\right) + \alpha_2\left(\frac{d\zeta}{dt} - \theta\eta\right).$$

Or, puisque le point A est le point central de R sur AX, on a aussi

$$\frac{dx}{dt} = h\alpha + k\alpha_2;$$

on en déduit par comparaison

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\xi}{dt} - \eta = h, \\ &\frac{d\eta}{dt} + \xi + \theta\zeta = 0, \\ &\frac{d\zeta}{dt} - \theta\eta = k, \end{aligned}\right.$$

formules qu'on aurait pu déduire d'ailleurs des formules du n° 12.

Supposons que le point O soit le pôle de la transformation et faisons tourner AX de 90° autour de OX', ce qui l'amène en X_1; lorsque AX engendre la surface R, X_1 engendre la surface R', transformée de R, et il est clair que le trièdre attaché à R est constamment parallèle à celui qui est attaché à R.

Soit P le point de rencontre de AX avec le plan Y'OZ'; après la transformation il vient en P', de manière que l'angle POP' soit égal à 90°. Par rapport au trièdre (O.X'Y'Z') les coordonnées de P sont

$$0, \qquad \eta, \qquad \zeta;$$

celles de P' seront donc

$$0, \qquad -\zeta, \qquad \eta,$$

et par suite les coordonnées de P' par rapport au trièdre fixe seront

$$-\zeta\alpha_1 + \eta\alpha_2, \qquad -\zeta\beta_1 + \eta\beta_2, \qquad -\zeta\gamma_1 + \eta\gamma_2;$$

il en résulte que les coordonnées absolues d'un point quelconque M de $P'X_1$, géné-

ratrice de R′ qui correspond à la génératrice AX de R, seront données par la formule

$$(2) \qquad x_1 = -\zeta\alpha_1 + \eta\alpha_2 + \rho\alpha$$

et par deux autres formules analogues pour y_1 et z_1, ρ désignant l'abscisse du point M par rapport à P′. En différentiant l'équation (2), on obtient

$$(3) \qquad \frac{dx_1}{dt} = \alpha\left(\frac{d\rho}{dt} + \zeta\right) + \alpha_1\left(-\frac{d\zeta}{dt} + \theta\eta + \rho\right) + \alpha_2\left(\frac{d\eta}{dt} + \theta\zeta\right);$$

et si l'on veut que le point M soit le point central de R′ sur $P'X_1$, il faut annuler le coefficient de α_1 dans (3), ce qui donne

$$(4) \qquad \rho = \frac{d\zeta}{dt} - \theta\eta.$$

L'abscisse ρ du point central étant ainsi définie, si l'on appelle θ_1, h_1 et k_1 les invariants de R′, on a

$$(5) \qquad \begin{cases} \theta_1 = \theta, \\ h_1 = \zeta + \dfrac{d\rho}{dt}, \\ k_1 = \dfrac{d\eta}{dt} + \theta\zeta. \end{cases}$$

Soient ξ_1 η_1 ζ_1 les coordonnées du point central de R′ par rapport au trièdre (O.X′Y′Z′) ; en se reportant aux formules (1) on voit que l'on a

$$(6) \qquad \xi_1 = k;$$

on a d'ailleurs

$$(7) \qquad \eta_1 = -\zeta, \qquad \zeta_1 = \eta;$$

enfin, la comparaison des formules (1) et (5) donne aussi

$$(8) \qquad k_1 = -\xi.$$

Ces diverses relations définissent la correspondance entre les surfaces R et R′.

D'après cela :

1° Je suppose que R soit développable; alors on a $k = 0$, et la formule (6) donne

$$\xi_1 = 0;$$

donc le point central de R′ coïncide avec le point P′ ; mais le plan Y′OZ′ est alors le plan asymptote de la conjuguée de R′, donc :

A toute surface développable la transformation fait correspondre une surface réglée telle que le plan mené normalement à la génératrice par le point central passe par le pôle ; c'est-à-dire telle que la développable asymptote de la conjuguée soit un cône de sommet O.

Réciproquement, *si le plan mené normalement à* AX *par le point* A *passe par le pôle, c'est-à-dire si la développable asymptote de la conjuguée de* R *est un cône de sommet* O, *la transformée* R′ *de* R *est une surface développable.*

En effet, on a dans ce cas $\xi = 0$, et par suite, en vertu de (8), $k_1 = 0$.

2° Je suppose que R soit à paramètre constant, alors ξ_1 sera constant en vertu de (6), et réciproquement, si k_1 est constant, ξ sera constant en vertu de (8) ; or, dans le premier cas, Y′OZ′ est tangent à une sphère de centre O et dans le second cas YAZ est tangent à une sphère de centre O également ; donc *si la surface primitive est à paramètre constant, le plan asymptote de la conjuguée de* R′ *est tangent à une sphère de centre* O, *et réciproquement.*

3° Je suppose que la développable asymptote de R soit un cône de sommet O, c'est-à-dire que le plan YAX passe par le point O ; on a alors $\zeta = 0$ et par suite $\eta_1 = 0$.

Réciproquement, si $\eta = 0$, on a $\zeta_1 = 0$, et par suite le plan asymptote de R′ passe par O ; donc *si la développable asymptote de la surface* R *est un cône de sommet* O, *la développable circonscrite à* R′ *le long de la ligne de striction est un cône ayant pour sommet le même point.*

Réciproquement, *si la développable circonscrite à* R *le long de la ligne de striction est un cône de sommet* O, *la développable asymptote de* R *est un cône de même sommet.*

4° Je suppose que AY passe par le point O, c'est-à-dire que l'on ait $\xi = 0$ et $\zeta = 0$; on en conclut

$$k_1 = 0, \qquad \eta_1 = 0 ;$$

réciproquement, si $k = 0$ ainsi que $\eta = 0$, on a

$$\xi = 0, \qquad \zeta_1 = 0,$$

ce qui montre que *si les développables asymptotes de* R *et de sa conjuguée sont des cônes de sommet* O, *la surface* R′ *est une surface développable dont le plan rectifiant passe par le point* O, et réciproquement, *si* R *est une surface développable dont le plan rectifiant passe par* O, *les développables asymptotes de* R′ *et de sa conjuguée sont des cônes de sommet* O.

Lorsque la développable asymptote d'une surface (R par exemple) et de sa conjuguée sont des cônes de même sommet O, la normale à la surface le long de la ligne de striction, normale qui n'est autre que AY, passe par le point O ; donc la ligne de striction est une ligne sphérique ; on a d'autre part, en vertu des formules (1), $k = \theta h$, et j'ai déjà fait remarquer (11, 6°) que dans ce cas la ligne de striction est une ligne de courbure. Les surfaces en question sont donc des surfaces dont la ligne de striction est une ligne sphérique et en même temps ligne de courbure de la surface.

Les formules (1) montrent enfin que l'on a $\eta = C^{te}$ et $h = -\eta = C^{te}$, de sorte que la développable circonscrite à ces surfaces le long de la ligne de striction est en même temps circonscrite à une sphère de centre O et de rayon η ; la surface réglée elle-même et sa conjuguée sont circonscrites à cette sphère. On est ainsi conduit à la construction déjà donnée (14) de ces surfaces.

5° Je suppose que AZ passe par le point O, c'est-à-dire que l'on ait

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0;$$

on en déduit

$$k_1 = 0, \qquad \zeta_1 = 0,$$

ce qui montre que la surface R′ est une surface développable dont le plan asymptote passe par le point O ; donc R′ est un cône de sommet O. — La réciproque est vraie.

6° Si la surface R est formée par les tangentes à une courbe plane dont le plan passe par O, il est évident géométriquement et par les formules que R′ est un conoïde droit ayant pour axe la perpendiculaire au plan de la courbe menée par O.

Il suit de là que *la transformée d'un plan par rapport à un point de ce plan est une congruence linéaire spéciale ayant pour directrices la droite à l'infini dans le plan et la perpendiculaire à ce plan menée par le pôle.*

7° Je suppose enfin que R soit formée par les tangentes à une courbe plane dont le plan ne passe pas par le pôle. Dans ce cas on a $\theta = 0$ et $k = 0$, et les formules (1) donnent $\zeta = C^{te}$; il en résulte

$$\theta_1 = 0, \qquad \rho = 0, \qquad h_1 = C^{te},$$

ce qui montre que R′ est une surface à plan directeur dont le cylindre circonscrit le long de la ligne de striction est un cylindre de révolution ayant pour axe la perpendiculaire au plan directeur menée par le pôle, et pour rayon la longueur de cette perpendiculaire. On arrive sans difficulté aux mêmes conclusions par des considérations de géométrie élémentaire.

On conclut de là que *la transformée d'un plan ne passant pas par le pôle est une congruence dont les focales sont :*

Un cylindre de révolution autour de la perpendiculaire au plan menée par le pôle et ayant pour rayon la longueur de cette perpendiculaire ;

La droite à l'infini dans le plan.

21. **Application aux congruences.** — Je rappelle d'abord quelques définitions relatives aux congruences de droites.

Lorsqu'une droite D appartient à une congruence, M. Ribaucour (*) appelle :

point moyen, le milieu de la distance focale;

plan moyen, le plan perpendiculaire à D mené par ce point;

surface moyenne, le lieu des points moyens ;

enveloppée moyenne, l'enveloppe des plans moyens.

D'après Kummer (**) les *points limites* sur D sont les points I tels que les deux surfaces réglées de la congruence passant par D et ayant leur point central en I sont tangentes en ce point; les *plans limites* sont les plans perpendiculaires à D menés par les points limites.

Cela posé, à toute droite D de la congruence la transformation fait correspondre une droite parallèle Δ; aux développables (D_1) et (D_2) de la congruence passant par D correspondent deux surfaces (S_1) et (S_2) passant par Δ et dont le point central (20) est le pied H de la perpendiculaire abaissée du pôle sur Δ. En outre, comme les plans asymptotes de deux surfaces correspondantes sont parallèles, il est visible que l'angle des deux surfaces (S_1) et (S_2) en H est égal à l'angle des deux développables (D_1) et (D_2).

Cela posé :

1° Si D engendre une congruence de normales, (D_1) et (D_2) sont orthogonales, et par suite (S_1) et (S_2) sont orthogonales en H ; mais alors le point H est le point moyen de la congruence engendrée par Δ; or, le plan perpendiculaire à D mené par H passe par O ; donc *aux congruences de normales la transformation fait correspondre des congruences dont l'enveloppée moyenne est le pôle, c'est-à-dire est un point.*

Réciproquement, *si la congruence engendrée par* D *a pour enveloppée moyenne le point* O, *la congruence engendrée par* Δ *est une congruence de normales.*

En effet, soit I le point moyen sur D et soient (R_1) et (R_2) les deux surfaces réglées de la congruence, qui passent par I et dont ce point est le point central; en vertu de ce qui précède (20), les surfaces correspondantes (Δ_1) et (Δ_2) sont développables ; mais (R) et (R_2) sont orthogonales en I, donc (Δ_1) et (Δ_2) sont orthogonales.

(*) *Étude des Elassoïdes*, etc.

(**) *Sur les systèmes de rayons rectilignes.*

Les développables de la congruence engendrée par Δ étant orthogonales, cette congruence est une congruence de normales.

Par exemple, supposons que les focales de la congruence engendrée par D soient deux courbes tracées sur la même sphère; l'enveloppée moyenne est un point, le centre de la sphère; la congruence qu'on en déduit par la transformation est donc une congruence de normales. D'après cela, on sait déterminer toutes les congruences dont l'enveloppée moyenne est un point, car par la transformation précédente toutes ces congruences deviennent des congruences de normales.

2° M. Ribaucour a montré que l'on peut déterminer analytiquement les congruences de normales dont l'enveloppée moyenne est un point; *la proposition précédente et sa réciproque prouvent que la transformation change ces congruences en congruences de même nature*. En effet, en vertu de la proposition directe, à une congruence de normales il correspond une congruence dont l'enveloppée moyenne est un point; en vertu de la réciproque, si l'enveloppée moyenne de la congruence primitive est un point, la congruence correspondante est une congruence de normales. Finalement, la congruence obtenue est de même nature que la congruence primitive.

3° Si la congruence engendrée par D est formée par les tangentes aux lignes asymptotiques d'une surface, les développables (D_1) et (D_2) sont confondues, et par suite aussi (S_1) et (S_2); il en résulte que la projection du pôle sur Δ est un point limite de la congruence engendrée par Δ; donc *aux congruences formées par les tangentes asymptotiques d'une surface, la transformation fait correspondre des congruences dont un plan limite passe par un point fixe.*

Réciproquement, *si un plan limite d'une congruence passe par un point fixe, la transformée est formée par les tangentes aux lignes asymptotiques d'une surface.*

En terminant ce chapitre, je dois dire que M. Ribaucour s'est occupé d'une manière accessoire de la transformation qui en fait l'objet. (*Étude des Élassoïdes*, page 94, § 67.) M. Ribaucour s'en sert uniquement pour déduire une congruence isotrope d'une autre congruence isotrope.

§ IV. — La transformation de M. Guichard

22. Dans une note déjà citée, M. Guichard a énoncé la proposition suivante déduite de sa transformation :

Si l'on considère une congruence de normales à une surface réglée, il correspond une

congruence dont la surface moyenne est un plan, dont l'une des focales est une surface développable et dont l'autre est un lieu de paraboles.

Je vais donner la démonstration de cette proposition comme application des invariants et du trièdre attaché à une surface réglée. Voici d'abord en quoi consiste la transformation de M. Guichard :

Soient une droite D (*fig.* 8), un plan P et un point O de ce plan. Je mène par un point M pris sur D la perpendiculaire Mm sur le plan P et je fais tourner le

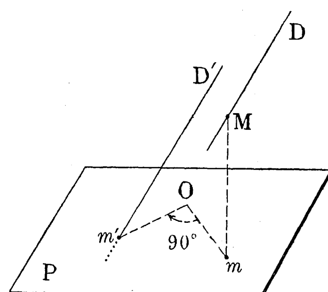


Fig. 8

point m de 90° autour de O dans un sens convenu, ce qui l'amène en m'; puis, par le point m', je mène la parallèle D' à D. Si D engendre une surface réglée R, et M une courbe de cette surface, D' engendre la transformée R' de R; cette transformée varie avec la courbe décrite par le point M sur R.

Cela posé, soit AX une génératrice d'une surface réglée R et soit (A.XYZ) le trièdre attaché à la surface. Prenons pour trièdre fixe le trièdre (O.xyz) et supposons que le plan fixe de la transformation soit le plan des xy et que le point fixe soit le point O. Soient ξ, η, ζ les coordonnées du point A (point central), M un point quelconque de AX et MN la normale à R en ce point. Si l'on appelle ρ l'abscisse de M par rapport à A, x, y, z, ses coordonnées absolues, on a

$$x = \xi + \alpha\rho,$$
$$y = \eta + \beta\rho,$$
$$z = \zeta + \gamma\rho;$$

d'autre part, les composantes, suivant les axes mobiles, de la vitesse absolue de M sont

$$h + \frac{d\rho}{dt}, \qquad \rho, \qquad k,$$

ce qui montre que les cosinus directeurs de MN par rapport aux mêmes axes sont

$$0, \qquad -k, \qquad \rho.$$

Le point m a pour coordonnées

$$x, \qquad y, \qquad 0,$$

et le point correspondant m',

$$-y, \qquad x, \qquad 0;$$

d'ailleurs si l'on mène $m'N'$ parallèle à MN, cette direction étant perpendiculaire à AX et à la projection sur YAZ de la vitesse du point M, ses cosinus directeurs sont proportionnels à

$$-k\alpha_1 + \rho\alpha_2, \qquad -k\beta_1 + \rho\beta_2, \qquad -k\gamma_1 + \rho\gamma_2.$$

Il en résulte que si λ désigne l'abscisse d'un point quelconque p de $m'N'$ par rapport à m', les coordonnées du point p sont données par les formules

$$(1) \qquad \begin{cases} x = -(\eta + \beta\rho) + \lambda(-k\alpha_1 + \rho\alpha_2), \\ y = \xi + \alpha\rho + \lambda(-k\beta_1 + \rho\beta_2), \\ z = \lambda(-k\gamma_1 + \rho\gamma_2). \end{cases}$$

1° *Quand* M *parcourt* AX, m'N' *enveloppe une parabole.* — Lorsque M parcourt AX, t est constant et ρ seul varie. Différentions alors les équations (1) par rapport à ρ et nous aurons la vitesse du point p quand M se meut sur AX. On obtient ainsi

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\rho} = -\beta + (-k\alpha_1 + \rho\alpha_2)\dfrac{d\lambda}{d\rho} + \lambda\alpha_2, \\ \dfrac{dy}{d\rho} = \alpha + (-k\beta_1 + \rho\beta_2)\dfrac{d\lambda}{d\rho} + \lambda\beta_2, \\ \dfrac{dz}{d\rho} = (-k\gamma_1 + \rho\gamma_2)\dfrac{d\lambda}{d\rho} + \lambda\gamma_2. \end{cases}$$

Pour que le point p décrive une courbe tangente à $m'N'$, il faut et il suffit que sa vitesse soit perpendiculaire à la direction α, β, γ et à la direction

$$\rho\alpha_1 + k\alpha_2, \qquad \rho\beta_1 + k\beta_2, \qquad \rho\gamma_1 + k\gamma_2,$$

qui est celle de la projection sur YAZ de la vitesse du point M.

Or, si l'on ajoute membre à membre les équations (2) après les avoir multipliées respectivement par α, β, γ, on trouve identiquement zéro. En opérant de même avec la seconde direction et exprimant que le résultat est nul, il vient

$$\lambda k + \rho\gamma_2 - k\gamma_1 = 0,$$

ce qui définit la valeur de λ,

$$\lambda = \gamma_1 - \frac{\rho}{k}\gamma_2.$$

Je porte cette valeur de λ dans les équations (1) qui définissent alors l'enveloppe de m'N'. On voit que le lieu défini par ces équations est une parabole.

2° *Le symétrique par rapport à* m' *du point* p *où* m'N' *touche la parabole décrit une droite.*

Ce point est en effet défini par les équations (1) dans lesquelles on fait

$$\lambda = -\gamma_1 + \frac{\rho}{k}\gamma_2.$$

Or, si l'on remplace λ par cette valeur, β et α respectivement par

$$\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2 \qquad \text{et} \qquad \beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2,$$

il vient, après réduction,

$$(3) \qquad \begin{cases} x = -\eta + k\gamma_1\alpha_1 + \alpha_2\left(\dfrac{\rho^2}{k}\gamma_2 - 2\rho\gamma_1\right), \\ y = \xi + k\gamma_1\beta_1 + \beta_2\left(\dfrac{\rho^2}{k}\gamma_2 - 2\rho\gamma_1\right), \\ z = k_1{}^2 + {}_2\lambda\gamma\left(\dfrac{\rho^2}{k}\gamma_2 - 2\rho\gamma_1\right); \end{cases}$$

ces équations définissent bien une droite Δ, parallèle à la direction α_2, β_2, γ_2 de l'axe de la parabole.

Dans les équations (3) qui définissent la droite Δ, je pose

$$k\gamma_1 = l,$$

$$\frac{\rho^2}{k}\gamma_2 - 2\rho\gamma_1 = r;$$

elles deviennent

$$(4) \qquad \begin{cases} x = -\eta + l\alpha_1 + r\alpha_2, \\ y = \quad \xi + l\beta_1 + r\beta_2, \\ z = \qquad l\gamma_1 + r\gamma_2. \end{cases}$$

Je vais montrer que si AX se déplace sur R, la droite Δ engendre une surface développable. Différentions pour cela les équations (4) par rapport à t, ce qui donne

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -h\beta - k\beta_2 + l'\alpha_1 - l(\alpha + \theta\alpha_2) + r'\alpha_2 + \theta r\alpha_1, \\ \dfrac{dy}{dt} = \quad h\alpha + k\alpha_2 + l'\beta_1 - l(\beta + \theta\beta_2) + r'\beta_2 + \theta r\beta_1, \\ \dfrac{dz}{dt} = \qquad l'\gamma_1 - l(\gamma + \theta\gamma_2) + r'\gamma_2 + \theta r\gamma_1. \end{cases}$$

On a ainsi la vitesse d'un point quelconque μ de Δ. Pour que cette vitesse soit parallèle à Δ, il faut et il suffit qu'elle soit perpendiculaire à α, β, γ et à α_1, β_1, γ_1; or, si l'on ajoute les équations (5) après les avoir multipliées respectivement par α, β, γ, on a identiquement zéro; si l'on opère de même avec α_1, β_1, γ_1, on doit avoir

$$h\gamma_2 - k\gamma + l' + \theta r = 0,$$

relation qui définit r.

La grandeur de la vitesse s'obtient en projetant sur α_2, β_2, γ_2; on obtient

$$V = -h\gamma_1 - \theta l + r';$$

d'autre part, si l'on appelle maintenant ρ le rayon de courbure de l'arête de rebroussement, on a aussi

$$v = \theta\rho,$$

de sorte que ρ sera défini par l'équation

$$\theta\rho = -h\gamma_1 + r' - \theta l.$$

§ V. — Étude de l'élément linéaire

23. **Expression de l'élément linéaire.** — Nous avons vu (n° 8) que la vitesse d'un point M sur AX, dont l'abscisse est λ, a pour composantes suivant les axes mobiles

$$h + \frac{d\lambda}{dt}, \qquad \lambda, \qquad k.$$

Si donc on désigne par s l'arc de trajectoire décrite par le point M, on a

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \left(h + \frac{d\lambda}{dt}\right)^2 + \lambda^2 + k^2.$$

Avec les variables choisies λ et t, l'expression de l'élément linéaire d'une surface réglée est donc

$$(1) \qquad ds^2 = d\lambda^2 + 2hd\lambda dt + (h^2 + k^2 + \lambda^2)dt^2.$$

24. **Surfaces réglées applicables génératrices par génératrices.** — Cette expression est indépendante de θ et elle ne dépend que de h et de k. Prenons alors un cône directeur absolument arbitraire, ce qui revient à se donner arbitrairement θ en fonction de t; on pourra supposer les neuf cosinus directeurs des arêtes du trièdre mobile exprimées en fonction de t également. Supposons enfin que h et k se rapportent à une surface R donnée à l'avance et dont le cône directeur soit différent de celui qui a été pris arbitrairement ; toutes les surfaces réglées définies par les équations

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \int (h\alpha + k\alpha_2)dt + \lambda\alpha, \\ y &= \int (h\beta + k\beta_2)dt + \lambda\beta, \\ z &= \int (h\gamma + k\gamma_2)dt + \lambda\gamma, \end{aligned} \right.$$

relativement aux axes fixes, ont même élément linéaire que la surface R et sont applicables sur elle génératrice par génératrice, d'où ce résultat bien connu :

Il existe une infinité de surfaces réglées applicables sur une autre génératrices par génératrices et toutes ces surfaces ne diffèrent entre elles que par le cône directeur.

25. **Surfaces réglées applicables avec parallélisme des génératrices.** — L'expression de l'élément linéaire ne change pas quand on change k en $-k$; d'où cette proposition de M. Beltrami (*) :

Une surface réglée étant donnée, il en existe une autre qui lui est applicable et dans laquelle les génératrices correspondantes sont parallèles et de même sens.

Si la première surface est définie par les équations (2) relativement aux axes fixes, la seconde sera définie par les équations

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \int (h\alpha - k\alpha_2)\,dt + \lambda\alpha, \\ y &= \int (h\beta - k\beta_2)\,dt + \lambda\beta, \\ z &= \int (h\gamma - k\gamma_2)\,dt + \lambda\gamma, \end{aligned}\right.$$

qui montrent que les deux surfaces, bien qu'applicables l'une sur l'autre, ne peuvent être déduites l'une de l'autre par une déformation continue, car les tangentes aux deux lignes de striction aux points correspondants sont également inclinées sur la génératrice mais en sens inverse.

Par exemple, si les surfaces sont à plan directeur, les dérivées des élévations des génératrices par rapport à un même plan parallèle au plan directeur sont égales et de signes contraires, ces dérivées étant prises par rapport à t; si donc z et z_1 sont les élévations des génératrices correspondantes, on a

$$\frac{dz}{dt} + \frac{dz_1}{dt} = 0,$$

d'où

$$z + z_1 = C^{te},$$

Il en résulte que les lignes de striction des deux surfaces sont symétriques par rapport à un plan parallèle au plan directeur.

26. **Relations entre les courbures des arêtes de rebroussement des développables asymptotes de deux surfaces réglées applicables avec parallélisme des génératrices.** — Soient l et l_1 les longueurs qui, avec les arêtes de rebroussement,

(*) *Sulla flessione delle superficie rigate; Annali di Matematica pura ed applicata*, t. 7.

définissent les deux surfaces (14) ; soient, d'autre part, ρ et τ les rayons de courbure et de torsion de la première courbe, ρ_1 et τ ceux de la deuxième au point correspondant. Puisque les surfaces ont leurs génératrices parallèles, on a

$$\theta = \theta_1,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\rho}{\tau} = \frac{\rho_1}{\tau_1}. \tag{4}$$

En exprimant que les invariants k sont égaux et de signes contraires, on obtient

$$l\frac{\rho}{\tau} = -\frac{l_1\rho_1}{\tau_1}; \tag{5}$$

enfin, en exprimant que les invariants h sont égaux, il vient

$$\rho - (l + l'') = \rho_1 - (l_1 + l''_1), \tag{6}$$

où l'on a posé

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = l'' \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2 l_1}{dt^2} = l''_1.$$

De ces relations on déduit les suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} l_1 &= -l, \\ \rho_1 &= \rho - 2(l + l''), \\ \tau_1 &= \frac{\tau}{\rho}\Big[\rho - 2(l + l'')\Big], \end{aligned}\right. \tag{7}$$

qui définissent entièrement la seconde surface au moyen de la première et, par conséquent, les arêtes de rebroussement en fonction l'une de l'autre.

27. Application. — Faisons une application et supposons

$$l + l'' = \text{const.} = \mathrm{C},$$

c'est-à-dire

$$l = \mathrm{A}\sin(\sigma + \mathrm{B}) + \mathrm{C}; \tag{8}$$

puis assujettissons l'arête de rebroussement de la développable asymptote relative à la première surface à être une courbe de M. Bertrand ; il faudra pour cela que

l'on ait entre ρ et τ une relation de la forme

$$\frac{a}{\rho} + \frac{b}{\tau} = 1. \tag{9}$$

Or, si des équations (7) on tire ρ et τ en fonction de ρ_1 et τ_1, puisque l'on remplace dans l'équation (9) en tenant compte de (8) il vient, toutes réductions faites,

$$\frac{a - 2C}{\rho_1} + \frac{b}{\tau_1} = 1, \tag{10}$$

ce qui montre que dans la seconde surface l'arête de rebroussement de la développable asymptote est aussi une courbe de M. Bertrand.

Si la constante C est nulle, il est évident que les arêtes de rebroussement sont identiques.

On voit donc que si dans le mode de génération d'une surface réglée donné n° 14 les longueurs que l'on porte sur la normale principale sont égales et de signes contraires et ont pour expressions respectives

$$A \sin(t + B) \qquad \text{et} \qquad - A \sin(t + B),$$

A et B désignant des constantes arbitraires, on obtient deux surfaces applicables avec parallélisme des génératrices.

Ceci donne le moyen de construire des couples de surfaces jouissant de la propriété énoncée en partant d'une courbe gauche quelconque.

28. **Surfaces réglées applicables sur l'alysséide.** — L'élément linéaire des surfaces réglées applicables sur l'alysséide ou sur l'hyperboloïde de révolution se ramène (*) à l'une des formes suivantes :

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + b^2) dv^2, \tag{11}$$

$$ds^2 = du^2 + [(u + av)^2 + b^2] dv^2. \tag{12}$$

Dans le premier cas, les génératrices de la surface réglée correspondent aux méridiens de l'alysséide, et dans le second cas, elles correspondent aux génératrices de l'hyperboloïde.

(*) Voir les *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, par M. Darboux (3e partie, page 234).

D'autre part, si l'on pose

$$-\int h\,dt = \varphi(t),$$

$$\lambda = u + \varphi(t),$$

l'expression (1) de l'élément linéaire d'une surface réglée se réduit à

$$(13) \qquad ds^2 = du^2 + [k^2 + (u + \varphi(t))^2]\,dt^2.$$

Si l'on identifie d'abord les expressions (11) et (13) de l'élément linéaire en posant

$$v = t,$$

on obtient

$$k = b, \qquad \varphi(t) = 0,$$

et par suite

$$h = 0.$$

Il suit de là que les surfaces réglées applicables sur l'alysséide de manière que les génératrices correspondent aux méridiens, sont celles pour lesquelles l'invariant h *est nul et le paramètre de distribution constant.*

Si l'on se reporte alors à la signification des équations simultanées

$$h = 0, \qquad k = C^{te},$$

on voit que la surface est un lieu de binormales à une courbe gauche à torsion constante ; donc

Lorsqu'une surface réglée est applicable sur l'alysséide, la ligne de striction est une courbe à torsion constante, et la surface est le lieu des binormales à cette courbe.

29. **Surfaces réglées applicables sur l'hyperboloïde de révolution.** — Identifions les expressions (13) et (12) de l'élément linéaire. La correspondance entre les génératrices des deux surfaces sera définie par l'équation

$$v = t\,;$$

en outre, on doit avoir

$$k^2 = b^2,$$

$$\varphi(t) = at,$$

et, par suite,

$$h = -a\,;$$

donc *quand une surface réglée est applicable sur l'hyperboloïde de révolution, les deux invariants* h *et* k *sont constants*; ce qui était du reste évident *a priori* puisque l'applicabilité des surfaces réglées génératrices par génératrices ne dépend que de h et de k et que, d'autre part, dans l'hyperboloïde de révolution, h et k sont constants.

Prenons $h = a$ et $k = b$; toutes les surfaces réglées applicables sur l'hyperboloïde de révolution avec correspondance des génératrices aux génératrices, et rapportées aux axes fixes, sont définies par les équations

$$x = \int (a\alpha + b\alpha_2)\, dt + \lambda\alpha,$$

$$y = \int (a\beta + b\beta_2)\, dt + \lambda\beta,$$

$$z = \int (a\gamma + b\gamma_2)\, dt + \lambda\gamma.$$

La ligne de striction est représentée par les mêmes équations où l'on a fait $\lambda = 0$; or on reconnaît dans ces équations, celles qui définissent les courbes de M. Bertrand ; d'où ce théorème dû à Laguerre :

Quand une surface réglée est applicable sur l'hyperboloïde de révolution, sa ligne de striction est une courbe de M. Bertrand.

30. **Remarque I.** — Qu'il s'agisse d'une surface réglée applicable sur l'alysséide, ou d'une surface réglée applicable sur l'hyperboloïde de révolution, il y a lieu d'examiner la nature de la développable asymptote. En appelant, comme toujours, ρ et τ les rayons de courbure et de torsion de l'arête de rebroussement, on a, dans le cas de l'hyperboloïde,

$$\rho = a + l + l'',$$

$$\tau = -l\frac{(a + l + l'')}{b};$$

le cas de l'alysséide s'en déduit en faisant

$$a = 0.$$

Ces formules définissent l'arête de rebroussement de la développable asymptote Dans le cas très simple où $l + l'' = 0$, elles deviennent

$$\rho = a,$$

$$\tau = -\frac{al}{b}.$$

Il y a lieu d'observer que l'arête de rebroussement ne doit pas être quelconque, car il doit exister entre ρ et τ une relation qu'on obtient d'ailleurs en éliminant l entre les expressions de ρ et de τ.

31. **Remarque II.** — Considérons deux surfaces réglées R et R_1. Soient θ, h, k les invariants de la première exprimés en fonction de l'arc t de la représentation sphérique de cette surface ; soient de même θ_1, h_1, k_1 les invariants de la seconde exprimés en fonction de l'arc t_1 de sa représentation sphérique. Supposons qu'en faisant correspondre sur les deux surfaces les génératrices pour lesquelles $t_1 = t$, on ait constamment

$$h_1 = h,$$

$$k_1 = k,$$

ce qui revient à dire que h_1 et h d'une part, k_1 et k de l'autre sont les mêmes fonctions de t ; il est clair que les éléments linéaires des deux surfaces sont les mêmes et par suite que les deux surfaces sont applicables génératrices par génératrices, comme cela a d'ailleurs déjà été observé (24).

Considérons maintenant une seule surface R ayant un cône directeur absolument quelconque et supposons qu'en faisant varier t de a à b les invariants h et k passent successivement par les mêmes séries de valeurs que si l'on fait varier t de c à d ; alors la portion de surface qui correspond aux variations de t dans le premier intervalle est applicable génératrices par génératrices sur celle qui correspond au second. Il en sera ainsi en particulier si h et k sont des fonctions périodiques de t ayant la même période, pourvu que θ ne soit pas une fonction périodique de t de même période que h et k ; car s'il n'en était pas ainsi, les portions de surface correspondant à deux périodes seraient non seulement applicables, mais superposables. — Si h et k sont constants, quel que soit θ la surface est applicable sur elle-même dans toutes ses parties ; par exemple l'hyperboloïde de révolution est applicable sur lui-même dans toutes ses parties, mais comme θ est constant, il est superposable à lui-même.

§ VI. — Étude des trajectoires orthogonales des génératrices

32. Pour étudier les courbes tracées sur une surface réglée, nous supposerons la surface rapportée à un trièdre parallèle au trièdre (A.XYZ), de même sens que lui et dont le sommet se déplace sur la courbe considérée ; soit $(M.X_1Y_1Z_1)$ ce trièdre

et soient a, b, c les composantes par rapport à ces nouveaux axes de la vitesse du point M. En appelant λ l'abscisse du point central par rapport au point M, on a évidemment

$$(1) \qquad a = h - \frac{d\lambda}{dt}, \qquad b = -\lambda, \qquad c = k,$$

de sorte que si x, y, z sont les coordonnées absolues du point M, on a aussi

$$\frac{dx}{dt} = a\alpha + b\alpha_1 + c\alpha_2,$$

et des expressions analogues pour $\frac{dy}{dt}$ ainsi que pour $\frac{dz}{dt}$. Si le point M décrit une trajectoire orthogonale de la surface, on a

$$(2) \qquad \begin{cases} a = 0, \\ h = \dfrac{d\lambda}{dt} = -\dfrac{db}{dt}, \\ \dfrac{dx}{dt} = b\alpha_1 + c\alpha_2. \end{cases}$$

33. **Expressions du rayon de courbure normale et du rayon de courbure géodésique d'une trajectoire orthogonale.** — Soient MT la tangente en M à la trajectoire orthogonale, MN la normale principale, MB la binormale à cette courbe et enfin ML la normale en M à la surface. Si l'on appelle V la vitesse du point M et s l'arc de trajectoire orthogonale, on a

$$V = \frac{ds}{dt} = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Cherchons d'abord le rayon de courbure normale et le rayon de courbure géodésique en M à la trajectoire orthogonale ; désignons-les respectivement par ρ_n et par ρ_g ; pour les obtenir il suffira de projeter l'accélération du point M sur la normale à la surface et sur le plan tangent en M, ou, ce qui revient au même ici, sur la normale à la surface et sur la génératrice MX.

Or, si l'on différentie la formule

$$\frac{dx}{dt} = b\alpha_1 + c\alpha_2,$$

on obtient

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -b(\alpha + \theta\alpha_2) + c\theta\alpha_1 + \alpha_1 b' + \alpha_2 c',$$

ce qui montre que les composantes de l'accélération du point M suivant les axes mobiles sont

$$-b, \qquad b' + \theta c, \qquad c' - \theta b.$$

La composante suivant MX est donc $-b$; d'autre part elle est $\frac{V^2}{\rho_g}$; on a donc

$$\frac{V^2}{\rho_g} = -b. \tag{3}$$

Je projette maintenant sur la normale à la surface ; je remarque d'abord pour cela que les cosinus directeurs de cette droite sont

$$0, \qquad -\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}, \qquad \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}};$$

par conséquent, la projection de l'accélération sur cette droite a pour expression

$$\frac{bc' - cb' - \theta(b^2+c^2)}{\sqrt{b^2+c^2}};$$

d'autre part la projection est égale à $\frac{V^2}{\rho_n}$; on a donc

$$\frac{V^2}{\rho_n} = \frac{bc' - cb' - \theta(b^2+c^2)}{\sqrt{b^2+c^2}}. \tag{4}$$

On peut donner à ces formules une autre forme au moyen de l'angle φ que fait la trajectoire orthogonale avec MY ; il suffit pour cela de poser

$$b = r\cos\varphi,$$

$$c = r\sin\varphi,$$

et il vient ainsi $V = r$ et

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\rho_g} &= -\frac{\cos\varphi}{r}, \\ \frac{1}{\rho_n} &= \frac{1}{r}\left[\frac{bk' + kh}{r^2} - \theta\right]. \end{aligned} \right. \tag{5}$$

La dernière se met encore aisément sous la forme

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{r}\left(\frac{d\varphi}{dt} - \theta\right). \tag{6}$$

Ces formules prises sous n'importe quelle forme se prêtent facilement à l'étude des variations de la courbure normale et géodésique le long d'une génératrice. Ainsi l'on a

$$\frac{1}{\rho_g} = -\frac{b}{b^2 + k^2},$$

et si l'on pose $\rho_g = \mathrm{Y}$, $b = \mathrm{X}$, on voit que l'on obtient une hyperbole équilatère pour représenter les variations du rayon de courbure géodésique ; l'équation de cette hyperbole est

$$\mathrm{X}^2 + k^2 + \mathrm{XY} = 0.$$

Au point central la courbure géodésique de la trajectoire orthogonale est nulle, car on a $b = 0$; quant à la courbure normale, elle prend la forme simple

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{k^2}\left(h - \theta k\right).$$

34. **Remarque**. — On passe évidemment d'une trajectoire orthogonale à une autre en ajoutant une constante à b.

35. **Trajectoires orthogonales qui sont des cercles géodésiques**. — Lorsque b et c sont des constantes, toutes les trajectoires orthogonales sont des cercles géodésiques; les diverses expressions de $\frac{1}{\rho_g}$ montrent que c'est là le seul cas où toutes les trajectoires orthogonales sont en même temps cercles géodésiques.

Dans ce cas on a

$$h = 0, \qquad k = \mathrm{C}^{\text{te}},$$

et la surface est, comme on l'a vu (28), formée par les binormales à une courbe à torsion constante, applicable sur l'alysséide. On sait d'ailleurs que toutes les fois qu'il y a sur une surface une famille orthogonale composée de géodésiques et de cercles géodésiques, la surface est applicable sur une surface de révolution de manière que les méridiens correspondent aux géodésiques et les parallèles aux cercles géodésiques.

L'expression de $\frac{1}{\rho_n}$ prend la forme simple

$$\frac{1}{\rho_n} = -\frac{\theta}{k};$$

or, si l'on se reporte à la génération de la surface au moyen de la développable

asymptote, on a

$$k = -\theta l,$$

et par suite

$$\rho_n = l.$$

Ainsi, *quand une surface réglée est formée par les binormales aux divers points d'une courbe gauche à torsion constante, le rayon de courbure normale en un point quelconque de cette courbe est égal à la distance de ce point à la génératrice correspondante de l'arête de rebroussement de la développable asymptote.*

Laissons de côté le cas particulier où b et c sont constants et cherchons s'il existe des trajectoires orthogonales qui soient cercles géodésiques de rayon m; on devra avoir

$$b^2 + c^2 = -mb,$$

c'est-à-dire

$$(7) \qquad b^2 + k^2 = -mb,$$

égalité qui établit une relation entre les invariants de la surface, de sorte qu'en général il n'y a pas de trajectoire orthogonale qui soit en même temps cercle géodésique.

Supposons qu'il y en ait une et voyons s'il en existe une autre, cercle géodésique de rayon n; si l'on désigne par β une constante à déterminer, on devra avoir

$$(8) \qquad (b + \beta)^2 + k^2 = -n(b + \beta)$$

en même temps que (7); d'où, en retranchant (7) et (8) membre à membre,

$$(9) \qquad 2b\beta + \beta^2 = (m - n)b - n\beta.$$

Si l'on avait $2\beta \neq m - n$, cette relation ne pourrait donner des valeurs constantes de β que si l'on avait $b = C^{te}$; on aurait alors à cause de (7) $k = C^{te}$ et nous rentrerions dans un cas déjà examiné. Pour qu'il y ait deux trajectoires orthogonales qui soient en même temps des cercles géodésiques de rayons différents, il faut donc que l'on ait

$$2\beta = m - n,$$

et par suite, en vertu de (9),

$$\beta = -n,$$

et alors finalement

$$m = -n = \beta.$$

Ainsi, *chaque fois qu'une trajectoire orthogonale est cercle géodésique, il y a une autre trajectoire orthogonale qui est un cercle géodésique dont le rayon est égal et de signe contraire à celui du premier; le raisonnement prouve qu'il n'y en a pas d'autres.*

36. **Torsion et torsion géodésique des trajectoires orthogonales.** — Cherchons maintenant la torsion géodésique des trajectoires orthogonales. Appelons τ le rayon de torsion de la trajectoire orthogonale qui passe par M, σ l'arc de la représentation sphérique de la binormale ; on a

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{r}{\tau},$$

ce qui donne l'expression de la vitesse du p int μ de la représentation sphérique qui correspond au point M. Cherchons les composantes de cette vitesse suivant les axes mobiles ; pour cela appelons ω l'angle de la normale principale en M avec la normale ML, et ξ, η, ζ les cosinus directeurs de la binormale par rapport aux axes attachés à la surface ; puis appliquons les formules du n° 1 en faisant abstraction de la translation. Une première expression de la composante suivant MX est ainsi

$$\frac{d\xi}{dt} - \eta ;$$

et d'autre part, une seconde expression est

$$\frac{r}{\tau} \sin \omega ;$$

on a donc

$$\frac{d\xi}{dt} - \eta = \frac{r}{\tau} \sin \omega ; \tag{10}$$

or,

$$\xi = \cos \omega,$$

$$\eta = \sin \omega \sin \varphi,$$

$$\zeta = -\sin \omega \cos \varphi,$$

et par suite

$$\frac{d\xi}{dt} = -\sin \omega \frac{d\omega}{dt} ;$$

en portant dans l'équation (10) il vient, après avoir divisé par sin ω,

$$-\frac{d\omega}{dt} - \sin\varphi = \frac{r}{\tau},$$

d'où l'on tire l'expression de la torsion géodésique

$$(11) \qquad \frac{1}{\tau} + \frac{d\omega}{ds} = -\frac{\sin\varphi}{r} = -\frac{c}{b^2 + c^2}.$$

On voit en particulier que pour le point central le rayon de torsion géodésique est égal au paramètre de distribution de la surface.

§ VII. — Lignes asymptotiques

37. **Équation des lignes asymptotiques.** — Je ne dirai que quelques mots sur les lignes asymptotiques. On obtient immédiatement leur équation en exprimant que l'accélération du point M est dans le plan tangent à la surface en ce point. Or, si l'on conserve les mêmes notations et les mêmes axes que dans le paragraphe précédent, les composantes de la vitesse sont

$$h + \frac{d\lambda}{dt}, \qquad \lambda, \qquad k,$$

λ étant supposé compté à partir du point central; on en déduit immédiatement les composantes de l'accélération en dérivant l'équation

$$\frac{dx}{dt} = \left(h + \frac{d\lambda}{dt}\right)\alpha + \lambda\alpha_1 + k\alpha_2,$$

et l'on obtient

$$\frac{dh}{dt} - \lambda + \frac{d^2\lambda}{dt^2}, \qquad h + \theta k + 2\frac{d\lambda}{dt}, \qquad \frac{dk}{dt} - \theta\lambda.$$

L'équation des lignes asymptotiques sera donc

$$\frac{h + \theta k + 2\lambda'}{\lambda} = \frac{k' - \theta\lambda}{k},$$

c'est-à-dire

$$(1) \qquad \lambda(k' - \theta\lambda) = k(h + \theta k + 2\lambda').$$

38. **Condition que doivent remplir les invariants pour que la ligne de striction soit ligne aymptotique.** — Pour que la ligne de striction soit ligne asymptotique, il faut et il suffit que l'équation (1) soit identiquement satisfaite pour $\lambda = 0$; ce qui exige que l'on ait

$$h + \theta k = 0.$$

39. **Un cas d'intégration de l'équation des lignes asymptotiques.** — L'équation des lignes asymptotiques s'intègre lorsque la surface est un lieu de binormales, d'une courbe à torsion constante, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$h = 0 \qquad \text{et} \qquad k = C^{te}.$$

Si l'on pose en effet $h = 0$ et $k = a$ dans l'équation (1), elle devient

$$2\lambda' a + \theta(\lambda^2 + a^2) = 0,$$

et donne immédiatement

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda}{a} = -\frac{1}{2}\int \theta dt;$$

or, si l'on appelle ρ et τ les rayons de courbure et de torsion de l'arête de rebroussement de la développable asymptote, on a

$$\theta = \frac{\rho}{\tau};$$

et d'autre part, si l'on prend pour variable indépendante l'arc σ de l'indicatrice sphérique des binormales à cette arête de rebroussement, on a aussi

$$\frac{\rho}{\tau} dt = d\sigma;$$

il en résulte que les lignes asymptotiques de la surface sont définies par l'équation

$$\lambda = a \operatorname{tg} \frac{1}{2}\left(C - \sigma\right),$$

C désignant une constante arbitraire.

40. **Théorème de M. Beltrami** (*). — L'équation des lignes asymptotiques ne

(*) *Loc. cit.*

contient θ qu'au premier degré; résolue par rapport à θ elle donne

$$\theta = \frac{\lambda k' - 2k\lambda' - kh}{\lambda^2 + k^2},$$

que l'on peut considérer comme définissant θ en fonction de k, h et λ. On a donc la proposition suivante, due à M. Beltrami :

Toute surface réglée peut être déformée de manière qu'une ligne quelconque tracée sur la surface devienne une ligne asymptotique de la transformée.

En particulier, si la courbe tracée sur la surface est une trajectoire orthogonale des génératrices, on a la proposition suivante, due à Bour (*) :

On peut par une déformation rendre toutes les génératrices d'une surface réglée normales principales de l'une quelconque de leurs trajectoires orthogonales.

41. **Autre forme de l'équation des lignes asymptotiques.** — On peut donner une autre forme à l'équation des lignes asymptotiques. Soit, pour cela, M un point quelconque de la génératrice et MT la tangente asymptotique en ce point. Menons par M le trièdre $(M.X_1Y_1Z_1)$ parallèle au trièdre (A.XYZ) et appelons a, b, c les cosinus directeurs de MT par rapport à ce trièdre, ψ et φ les angles polaires qui définissent la direction. Soient enfin MN la normale principale à la ligne asymptotique et MC la projection de MT sur le plan Y_1MZ_1.

La direction MN est celle de la vitesse d'un point de coordonnées a, b, c quand on fait abstraction de la translation de l'origine ; or, les composantes de cette vitesse sont

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} V_{X_1} &= \frac{da}{dt} - b,\\ V_{Y_1} &= \frac{db}{dt} + a + \theta c,\\ V_{Z_1} &= \frac{dc}{dt} - \theta b.\end{aligned}\right.$$

Pour que MT soit tangente asymptotique, il faut et il suffit que MN soit dans le plan XMC, c'est-à-dire que V_{Y_1} et V_{Z_1} soient proportionnels à b et à c; ce qui donne, pour l'équation des lignes asymptotiques,

$$(3)\qquad b\frac{dc}{dt} - c\frac{db}{dt} - \theta(b^2 + c^2) - ac = 0.$$

(*) Bour, *Journal de l'Ecole Polytechnique*, cahier XXXIX.

Or, on a

$$(4) \qquad \begin{cases} a = \sin \varphi, \\ b = \cos \varphi \cos \psi, \\ c = \cos \varphi \sin \psi, \end{cases}$$

et, en remplaçant a, b, c par ces valeurs dans l'équation (3), on obtient, toutes réductions faites,

$$\frac{d\psi}{dt} = \theta + \operatorname{tg} \varphi \sin \psi.$$

On peut remarquer que V_{x_1}, V_{y_1} et V_{z_1} sont précisément les composantes du déplacement qui donne la courbure de la ligne asymptotique ; de sorte que si ρ est le rayon de courbure en M et s l'arc décrit par ce point, on a

$$V_{x_1} = \frac{da}{dt} - b = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{ds}{dt} \cos \varphi,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\varphi}{dt} - \cos \psi = \frac{1}{\rho} \frac{ds}{dt},$$

ce qui permet d'obtenir le rayon de courbure de la ligne asymptotique.

§ VIII. — Lignes géodésiques

42. Équation des lignes géodésiques. – On obtient immédiatement l'équation des lignes géodésiques en exprimant que le plan osculateur de la trajectoire d'un point M est normal à la surface ; on obtient ainsi l'équation

$$\begin{vmatrix} 0 & k & -\lambda \\ h + \lambda' & \lambda & k \\ \lambda'' + h' - \lambda & 2\lambda' + h + \theta k & k' - \theta\lambda \end{vmatrix} = 0 ;$$

ou, en développant,

$$(1) \qquad (\lambda^2 + k^2)(\lambda'' + h' - \lambda) - \lambda (\lambda' + h)^2 - (\lambda' + h)(\lambda\lambda' + kk') = 0.$$

43. **Forme remarquable de l'équation des lignes géodésiques.** — Cette équation peut être mise sous une forme remarquablement simple. Désignons en effet par a, b, c les cosinus directeurs par rapport aux axes $(M.XY_1Z_1)$ de la tangente en M à une géodésique. Le déplacement de la représentation sphérique de cette direction est parallèle à la normale principale en M à la géodésique ; par suite il est perpendiculaire à la génératrice, et sa composante suivant MX est nulle.

Or, comme nous l'avons déjà vu à plusieurs reprises, la composante suivant MX du déplacement de la représentation sphérique est

$$\frac{da}{dt} - b;$$

on doit donc avoir, si la trajectoire du point M est une géodésique, et alors seulement,

$$\frac{da}{dt} = b. \tag{2}$$

Telle est l'équation réduite cherchée des lignes géodésiques.

44. **Expression de l'arc de géodésique d'une surface développable.** — Je vais donner tout de suite une application de l'équation (2) aux surfaces développables. Dans ce cas si l'on appelle φ l'angle de la géodésique avec la génératrice, on a

$$a = \cos\varphi, \qquad b = \sin\varphi,$$

et par suite l'équation (2) donne

$$\frac{d\varphi}{dt} = -1,$$

d'où, en désignant par C une constante arbitraire,

$$\varphi = C - t.$$

On achève facilement dans ce cas l'intégration de l'équation des géodésiques ; mais je vais en tirer une autre conséquence. On a, en effet, pour définir la géodésique,

$$\cot g\,\varphi = \frac{\lambda' + h}{\lambda},$$

c'est-à-dire

$$\cot g(C - t) = \frac{\lambda' + h}{\lambda}; \tag{3}$$

d'autre part, en appelant S l'arc de géodésique, on a

$$dS^2 = [\lambda^2 + (\lambda' + h)^2]\, dt^2,$$

expression qui devient, en vertu de (3),

$$(4) \qquad dS = \frac{(\lambda' + h)\, dt}{\cos(C - t)} = \frac{\lambda dt}{\sin(C - t)}.$$

Or, si l'on désigne par σ l'arête de rebroussement de la développable et par ρ son rayon de courbure en M, on sait que l'on a

$$h = \rho = \frac{d\sigma}{dt};$$

et si on pose

$$\frac{d\lambda}{dt} + h = \frac{du}{dt},$$

il vient

$$\lambda = u - \sigma,$$

et l'équation (3) des lignes géodésiques devient

$$du + (u - \sigma) \operatorname{cotg}(t - C)\, dt = 0;$$

équation que l'on peut écrire successivement

$$du + u \operatorname{cotg}(t - C)\, dt = \sigma \operatorname{cotg}(t - C)\, dt,$$

$$d[u \sin(t - C)] = \sigma \cos(t - C)\, dt,$$

d'où l'on tire

$$u = \frac{\int \sigma \cos(t - C) dt + C'}{\sin(t - C)}.$$

Il en résulte pour l'arc de géodésique la formule

$$(5) \qquad \frac{dS}{dt} = \frac{C'}{\sin^2(t - C)} - \frac{\int \rho \sin(t - C) dt}{\sin^2(t - C)}.$$

Remarquons maintenant que l'on a

$$\operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{tg}(t - C)$$

et rappelons que M. P. Serret a démontré dans sa thèse (page 139) qu'en chaque point d'une ligne géodésique tracée sur une surface développable, le rapport $\frac{R_2}{R_1}$ des deux courbures de la géodésique est égal à la tangente trigonométrique de son inclinaison sur la génératrice correspondante. On aura donc

$$\frac{R_1}{R_2} = -\operatorname{cotg}(t - C).$$

Or, dans la formule (4) $\frac{C'}{\sin^2(t-C)}$ est justement la dérivée de $C' \operatorname{cotg}(t-C)$ au signe près; posant alors

$$\frac{\int \rho \sin(t-C)\, dt}{\sin^2(t-C)} = f(t),$$

et intégrant, il vient

$$(5) \qquad S - S_0 = -C' \frac{R_1}{R_2} - \int f(t)\, dt.$$

Voici deux conséquences de cette formule :

1° Si la surface développable est un cône, on a $\rho = 0$, et la formule (5) donne

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{S_0 - S}{C'};$$

d'où il suit que *dans toute géodésique d'un cône, le rapport des deux courbures est une fonction linéaire de l'arc.*

2° Si l'arête de rebroussement de la développable est une courbe dont la première courbure est constante, on a encore, en intégrant,

$$S - S_0 = -C' \frac{R_1}{R_2} + a \frac{\cos(t-C)}{\sin^2(t-C)}$$

ou bien

$$S - S_0 = -C' \frac{R_1}{R_2} + a \frac{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}{R_2},$$

dans laquelle a est la valeur constante du rayon de courbure de l'arête de rebroussement de la développable.

45. **Rayons de courbure et de torsion des géodésiques.** — Revenons maintenant

aux lignes géodésiques d'une surface quelconque et cherchons la courbure et la torsion en un point quelconque M.

Soit MT la tangente à la géodésique en ce point, φ et ψ ses angles polaires par rapport au trièdre $(M.XY_1Z_1)$ défini dans le paragraphe précédent.

J'appelle :

a, b, c, les cosinus directeurs de MT;
a_1, b_1, c_1, ceux de la normale principale MN;
a_2, b_2, c_2, ceux de la binormale MB.

On a :

$$\begin{aligned} a &= \sin\varphi, & a_1 &= 0, & a_2 &= \cos\varphi, \\ b &= \cos\varphi\cos\psi, & b_1 &= -\sin\psi, & b_2 &= -\sin\varphi\cos\psi, \\ c &= \cos\varphi\sin\psi; & c_1 &= \cos\psi; & c_2 &= -\sin\varphi\sin\psi. \end{aligned}$$

Si l'on désigne par ρ le rayon de courbure de la géodésique et par s l'arc de cette courbe, la vitesse de la représentation sphérique de MT est $\frac{1}{\rho}\cdot\frac{ds}{dt}$ et elle est dirigée suivant MN. Projetons-la sur MX et sur MY_1; sa projection sur MX doit être nulle; on en conclut (43) l'équation des lignes géodésiques

$$\frac{da}{dt} = b,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\varphi}{dt} = \cos\psi. \tag{6}$$

Sa composante suivant MY_1 a pour expression

$$-\frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt}\sin\psi \qquad \text{et} \qquad \frac{db}{dt} + a + \theta c;$$

en égalant ces deux expressions il vient, après simplification des résultats,

$$\frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt} = -\sin\varphi\sin\psi - \left(\theta - \frac{d\psi}{dt}\right)\cos\varphi, \tag{7}$$

équation qui définit le rayon de courbure.

Pour avoir le rayon de torsion, il suffit de même d'égaler deux expressions de la projection sur MZ_1 par exemple, de la vitesse de la représentation sphérique de

la binormale. Cette vitesse, qui est égale à $\frac{1}{\tau}\frac{ds}{dt}$, est dirigée suivant MN; on aura donc

$$\frac{1}{\tau}\frac{ds}{dt}\cos\psi = \frac{dc_2}{dt} - \theta b_2,$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (6) et après simplification,

$$\frac{1}{\tau}\frac{ds}{dt} = \theta\sin\varphi - \cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\frac{d\psi}{dt}. \tag{8}$$

Pour $\varphi = 0$, on retrouve bien l'expression de la courbure géodésique des trajectoires orthogonales (33).

46. **Relation remarquable entre la courbure et la torsion d'une ligne géodésique.** — La comparaison des formules (7) et (8) conduit à une relation remarquable entre la courbure et la torsion. Si en effet on élimine θ entre ces deux relations on obtient

$$\left(\frac{\sin\varphi}{\rho} + \frac{\cos\varphi}{\tau}\right)\frac{ds}{dt} = -\sin\psi. \tag{9}$$

Soit λ la distance du point central au point M; on a

$$\frac{\sin\varphi}{\lambda' + h} = \frac{\cos\varphi\cos\psi}{\lambda} = \frac{\cos\varphi\sin\psi}{k} = \frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\lambda^2 + k^2}}.$$

On tire de là

$$\frac{\sin\psi}{\left(\frac{ds}{dt}\right)} = \frac{k\cos\varphi}{\lambda^2 + k^2},$$

et, en portant dans la relation (9), il vient

$$\frac{\sin\varphi}{\rho} + \frac{\cos\varphi}{\tau} = -\frac{k\cos\varphi}{\lambda^2 + k^2}; \tag{10}$$

telle est la relation que je voulais établir.

On voit que pour un même point M elle ne dépend que de l'angle que la géodésique fait avec la génératrice.

La relation de M. P. Serret relative aux géodésiques des surfaces dévelop-

pables et dont nous nous sommes servis au nº 44 en est un cas particulier et s'en déduit en faisant $k = 0$.

47. **Théorème de M. Bonnet.** — Je terminerai ce qui est relatif aux lignes géodésiques par deux propositions dues à MM. Bonnet et Beltrami.

Je reprends d'abord l'équation (1) des lignes géodésiques ; elle est satisfaite identiquement si le rapport $\frac{k}{h}$ est constant et si $\lambda = 0$; or,

$$\frac{k}{h} = C^{te}$$

signifie que la ligne de striction coupe les génératrices à angle constant ; de là la proposition de M. Bonnet (*) :

Lorsque les génératrices coupent la ligne de striction à angle constant, celle-ci est une ligne géodésique de la surface.

48. **Théorème de M. Beltrami** (**). — La proposition de M. Beltrami s'énonce comme il suit :

Toute surface réglée peut, par une déformation, être transformée en une autre et de manière qu'une ligne géodésique quelconque devienne une ligne droite.

Exprimons en effet que le plan osculateur de la trajectoire d'un point M est indéterminé, ce qui revient à exprimer que la trajectoire est une ligne droite. On obtient ainsi les deux équations

$$\frac{\lambda' + h}{\lambda'' + h' - \lambda} = \frac{\lambda}{h + \theta k + 2\lambda'} = \frac{k}{k' - \theta\lambda},$$

qui expriment que la courbe est à la fois ligne géodésique et ligne asymptotique ; mais si on les interprète autrement, on voit que si h et k sont des fonctions connues de t, et si de plus λ est une fonction de t définissant une ligne géodésique, l'une quelconque des équations définit θ ; de là résulte évidemment le théorème de M. Beltrami.

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, t. XIX.
(**) *Loc. cit.*

§ IX. — Lignes de courbure

49. **Équation des lignes de courbure.** — Soit M un point quelconque d'une ligne de courbure et soit ξ la distance du point central correspondant au point M. En posant

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{k}{\xi}, \tag{1}$$

on trouve que les coordonnées du point I situé sur la normale en M et à la distance R de ce point sont, par rapport aux axes mobiles,

$$x_1 = \xi, \qquad y_1 = -\text{R}\sin\varphi, \qquad z_1 = \text{R}\cos\varphi\,;$$

les composantes, suivant les mêmes axes, de la vitesse de ce point sont donc

$$\left\{\begin{aligned} \text{V}_x &= h + \text{R}\sin\varphi + \frac{d\xi}{dt}, \\ \text{V}_y &= \xi - \sin\varphi\cdot\frac{d\text{R}}{dt} + \left(0 - \frac{d\varphi}{dt}\right)\text{R}\cos\varphi, \\ \text{V}_z &= k + \cos\varphi\cdot\frac{d\text{R}}{dt} + \left(0 - \frac{d\varphi}{dt}\right)\text{R}\sin\varphi. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

On a du reste en dérivant l'équation (1)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\xi\dfrac{dk}{dt} - k\dfrac{d\xi}{dt}}{k^2+\xi^2}. \tag{3}$$

Pour que le point I décrive une ligne de courbure, il faut et il suffit que sa vitesse soit dirigée suivant la normale IM ; ce qui exige que sa projection sur AX soit nulle et que ses composantes suivant AY et AZ soient proportionnelles à $-\sin\varphi$ et à $\cos\varphi$.

La première condition donne

$$h + \text{R}\sin\varphi + \frac{d\xi}{dt} = 0, \tag{4}$$

et la deuxième

$$\xi\cos\varphi + k\sin\varphi + \text{R}\left(0 - \frac{d\varphi}{dt}\right) = 0. \tag{5}$$

L'élimination de φ entre les relations (1), (3), (4) et (5) conduit aux deux nouvelles relations

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\xi \dfrac{dk}{dt} - k\dfrac{d\xi}{dt}}{k^2+\xi^2} - \theta = \dfrac{\sqrt{k^2+\xi^2}}{R}, \\ h + \dfrac{d\xi}{dt} = -\dfrac{kR}{\sqrt{k^2+\xi^2}}. \end{cases}$$

Pour obtenir l'équation des lignes de courbure, il suffit d'éliminer R entre ces deux équations ; on obtient ainsi

$$(7)\qquad \left(h + \frac{d\xi}{dt}\right)\left[\frac{\xi \dfrac{dk}{dt} - k\dfrac{d\xi}{dt}}{k^2+\xi^2} - \theta\right] + k = 0.$$

50. **Équation aux rayons de courbure principaux.** — Si au lieu d'éliminer R entre les équations (6) on élimine $\dfrac{d\xi}{dt}$, on obtient l'équation admettant pour racines les rayons de courbure principaux ; cette équation ordonnée par rapport à R se met sous la forme

$$(8)\qquad k^2R^2 - R\left[\xi\frac{dk}{dt} + kh - \theta(k^2+\xi^2)\right](k^2+\xi^2)^{\frac{1}{2}} - (k^2+\xi^2)^2 = 0.$$

La comparaison de cette équation à l'équation (11) du § VI conduit à la proposition suivante :

En tout point d'une surface réglée la courbure totale est égale à la torsion géodésique de la trajectoire orthogonale qui passe par ce point.

L'équation (8) met en évidence une autre propriété. Pour qu'au point M les rayons de courbure principaux soient égaux et de signes contraires, il faut et il suffit que l'on ait

$$(9)\qquad \xi\frac{dk}{dt} + kh - \theta(k^2+\xi^2) = 0.$$

Cette équation est du premier degré en θ ; il en résulte que si ξ est une fonction donnée de t, elle définit une valeur de θ et une seule ; donc *une surface réglée étant donnée, on peut, par une simple déformation, en obtenir une autre telle que les rayons de courbure principaux soient égaux et de signes contraires tout le long d'une ligne donnée à l'avance.*

51. **Surfaces réglées minima.** — Pour que les rayons de courbure principaux soient égaux et de signes contraires en chaque point de la surface, il faut et il suffit que l'équation (9) soit une identité. On en déduit

$$h = 0, \qquad k = C^{te} \qquad \text{et} \qquad \theta = 0,$$

donc *les seules surfaces réglées minima sont les hélicoïdes à plan directeur.*

52. **Autres propriétés relatives aux lignes de courbure.** — Reprenons l'équation des lignes de courbure ; l'invariant θ y entre au premier degré, de sorte que si h, k et ξ sont donnés en fonction de t, elle donne une valeur réelle pour θ, d'où la proposition suivante, due à M. Beltrami :

Une surface réglée étant donnée, on peut par une simple déformation en obtenir une autre admettant comme ligne de courbure la transformée d'une ligne quelconque tracée sur la première.

Il faut toutefois observer que la ligne tracée sur la première surface ne doit pas être une trajectoire orthogonale des génératrices ; car, s'il en était ainsi, on aurait

$$h + \frac{d\xi}{dt} = 0,$$

et l'on ne pourrait plus résoudre par rapport à θ.

Il est évident *a priori* que les trajectoires orthogonales des génératrices ne peuvent être lignes de courbure ; ce fait résulte aussi de la forme de l'équation (7) qui montre en outre que dans une surface développable toutes les trajectoires orthogonales sont des lignes de courbure, ce qui était du reste aussi évident.

53. **Condition pour que la ligne de striction soit ligne de courbure.** — Pour que la ligne de striction soit une ligne de courbure de la surface, il faut et il suffit que l'équation (7) soit satisfaite quand on y fait $\xi = 0$, ce qui exige que l'on ait

$$k = \theta h.$$

Toutes les surfaces jouissant de cette propriété sont définies par les équations

$$(10) \qquad \begin{cases} x = -\int h d\alpha_1 + \lambda\alpha, \\ y = -\int h d\beta_1 + \lambda\beta, \\ z = -\int h d\gamma_1 + \lambda\gamma. \end{cases}$$

Lorsque la ligne de striction est une ligne de courbure de la surface et que le paramètre est constant, une première série de lignes de courbure est définie par l'équation

$$\xi = C^{te}$$

et, par conséquent, toutes les lignes de cette série déterminent des segments égaux sur les génératrices. Les lignes de la seconde série sont alors définies par une équation de Riccati et, par suite, partagent homographiquement les génératrices.

Il est aisé de voir que, réciproquement, les seules surfaces réglées dont les lignes de courbure d'une série déterminent des segments égaux sur les génératrices sont celles pour lesquelles k est constant et dont la ligne de striction est ligne de courbure. En effet, cette propriété ne dépend que des infiniment petits du second ordre, de sorte que si elle est remplie pour une surface, elle l'est également pour l'hyperboloïde osculateur suivant une génératrice quelconque ; or, les seuls hyperboloïdes jouissant de cette propriété sont les hyperboloïdes de révolution, pour lesquels k est constant et pour lesquels la ligne de striction est ligne de courbure. L'hyperboloïde osculateur suivant chaque génératrice doit donc être de révolution, ce qui exige que l'on ait

$$k = C^{te} \qquad \text{et} \qquad k = \theta h,$$

ce qui démontre la proposition.

La démonstration me paraît plus simple que celle qui a été donnée par M. Bioche dans les *Annales de la Faculté de Toulouse*.

54. **Détermination de toutes les surfaces réglées dont la ligne de striction est plane et est ligne de courbure.** — Les équations (10) donnent simplement toutes les surfaces réglées dont la ligne de striction est ligne de courbure et est en même temps une courbe plane. Supposons en effet que la ligne de striction satisfasse à ces deux conditions ; on peut supposer que son plan soit représenté par l'équation $z = C^{te}$, par rapport aux axes fixes ; or, par rapport aux axes fixes, la ligne de striction est représentée par les équations (10) après qu'on y a fait $\lambda = 0$.

La dernière de ces équations devant se réduire à $z = C^{te}$, il faut que $d\gamma_1 = 0$, c'est-à-dire que γ_1 soit constant ; mais alors la représentation sphérique de la surface est une hélice sphérique.

Ainsi, *lorsque la ligne de striction est une courbe plane, si elle est en même temps ligne de courbure la représentation sphérique de la surface est une hélice sphérique.*

Supposons en particulier que le cône directeur de la surface soit de révolution ; alors, d'après le théorème précédent, si la ligne de striction est ligne de courbure

de la surface, cette ligne est plane et son plan est perpendiculaire à l'axe du cône directeur.

Cherchons la ligne de striction dans ce cas ; en prenant l'axe du cône pour axe des z du trièdre fixe et en appelant φ le demi-angle au sommet, on peut poser

$$\alpha = \sin\varphi\cos\omega, \qquad \alpha_1 = -\sin\omega,$$

$$\beta = \sin\varphi\sin\omega, \qquad \beta_1 = \cos\omega,$$

$$\gamma = \cos\varphi\,; \qquad \gamma_1 = 0\,;$$

$$dt = \sin\varphi\, d\omega.$$

On en déduit

$$d\alpha_1 = -\cos\omega\, d\omega,$$

$$d\beta_1 = -\sin\omega\, d\omega,$$

et par suite, les équations de la ligne de striction sont

$$x = \int h\cos\omega\, d\omega,$$

$$y = \int h\sin\omega\, d\omega,$$

$$z = c.$$

Soit d'abord $h = r$; ces équations donnent

$$x = r\cos\omega + a,$$

$$y = -r\sin\omega + b,$$

$$z = c,$$

c'est-à-dire un cercle, et la surface est un hyperboloïde de révolution.

Prenons $h = r\cos\omega$; on aura

$$x = \frac{r\omega}{2} + \frac{r}{4}\sin 2\omega + a,$$

$$y = \frac{r}{4}\cos 2\omega + b,$$

$$z = c.$$

Prenons enfin $h = r \cos p\omega$, et nous aurons

$$x = r \int \cos \omega \cos p\omega \, d\omega,$$

$$y = r \int \sin \omega \cos p\omega \, d\omega,$$

$$z = c;$$

qui définissent une ligne plane algébrique si $p \neq 1$. La surface elle-même est algébrique.

DEUXIÈME PARTIE

APPLICATION A L'ÉTUDE DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE

ASSUJETTI A CINQ CONDITIONS

§ 1. — Trajectoires des points du corps

55. **Calcul de la vitesse.** — On sait que le mouvement d'un corps solide assujetti à cinq conditions peut s'obtenir en faisant rouler et glisser une surface réglée mobile sur une surface réglée fixe : celle-ci sera appelée la *base* et celle-là la *roulette.* La base est le lieu des axes hélicoïdaux dans l'espace ; la roulette est le lieu des axes hélicoïdaux dans le corps. Je me propose, dans cette seconde partie de mon travail, de faire l'étude géométrique du mouvement à l'aide des invariants de la base et de la roulette.

Je passerai d'ailleurs rapidement sur les détails bien connus de cette étude pour ne m'attacher qu'aux points qui paraissent comporter quelques développements nouveaux.

Je vais d'abord exprimer la vitesse et les accélérations des divers ordres d'un point quelconque du corps, en fonction des invariants de la base et de la roulette. J'appelle h, k, θ les invariants de la base ; h_1, k_1, θ_1 ceux de la roulette ; les deux surfaces se raccordant constamment, on a

$$k_1 = k.$$

Soient (A.XYZ) (*fig.* 9) le trièdre attaché à la base et (O.xyz) un trièdre fixe dans l'espace. Je détermine les cosinus directeurs des arêtes du trièdre (A.XYZ), par rapport au trièdre fixe, par le tableau du n° 1 et j'appelle ξ, η, ζ les coordonnées absolues du point A (point central de la base).

Je figure à part le trièdre $(A_1 . X_1Y_1Z_1)$ (*fig.* 10), le trièdre attaché à la roulette, et j'appelle $(O_1 . x_1y_1z_1)$ un nouveau trièdre fixe dans le corps; le trièdre $(A_1 . X_1Y_1Z_1)$ coïncide, à chaque instant, avec le trièdre (A.XYZ). Il est clair que les arcs des représentations sphériques de la base et de la roulette sont égaux à chaque instant, de sorte qu'on peut les supposer égaux au temps.

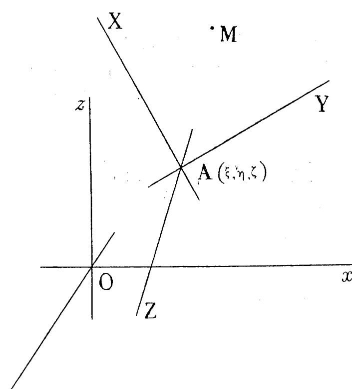


Fig. 9

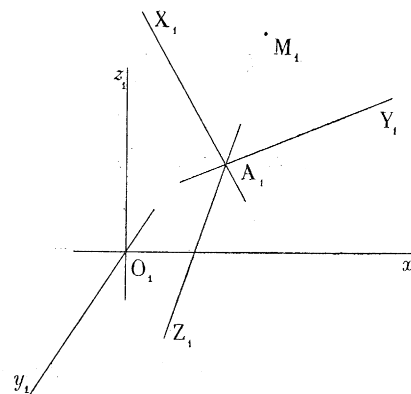


Fig. 10

Soit M_1 le point du corps qui coïncide avec le point M à l'instant t, et soient X, Y, Z ses coordonnées relativement aux axes $(A_1 . X_1Y_1Z_1)$ ou, ce qui revient au même, relativement aux axes (A.XYZ); soient enfin V_X, V_Y, V_Z les composantes, suivant les axes mobiles, de la vitesse absolue du point M.

Les formules (1) du n° 1 donnent

$$(1)\qquad \begin{cases} V_X = h - Y + \dfrac{dX}{dt}, \\[2mm] V_Y = X + \theta Z + \dfrac{dY}{dt}, \\[2mm] V_Z = k - \theta Y + \dfrac{dZ}{dt}; \end{cases}$$

mais le point M_1 étant fixe dans le corps, en vertu des formules du n° 12 on a

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = -h_1 + Y, \\[2mm] \dfrac{dY}{dt} = -X - \theta_1 Z, \\[2mm] \dfrac{dZ}{dt} = -k + \theta_1 Y. \end{cases}$$

On en conclut

$$(3)\qquad \begin{cases} V_X = h - h_1, \\ V_Y = (\theta - \theta_1)Z, \\ V_Z = (\theta_1 - \theta)Y. \end{cases}$$

On voit tout de suite que les deux surfaces roulent l'une sur l'autre si l'on a

$$h = h_1;$$

ceci résulte d'ailleurs de ce que, dans ce cas, les deux surfaces sont applicables, et par suite on a

$$h = h_1 \qquad \text{et} \qquad k = k_1.$$

Si l'on pose

$$(4)\qquad \begin{cases} h - h_1 = \omega R, \\ \theta_1 - \theta = \omega, \end{cases}$$

les formules (3) prennent la forme simple

$$(5)\qquad \begin{cases} V_X = \omega R, \\ V_Y = -\omega Z, \\ V_Z = \omega Y, \end{cases}$$

et si l'on veut simplement la direction de la vitesse, on peut au vecteur qui la représente substituer le vecteur proportionnel dont les composantes sont respectivement

$$R, \qquad -Z, \qquad Y,$$

de sorte que si l'on appelle x, y, z les coordonnées absolues du point M, les composantes de ce nouveau vecteur sont

$$\frac{1}{\omega}\cdot\frac{dx}{dt}, \qquad \frac{1}{\omega}\cdot\frac{dy}{dt}, \qquad \frac{1}{\omega}\cdot\frac{dz}{dt};$$

j'ajoute que l'on a

$$(6)\qquad \frac{1}{\omega}\cdot\frac{dx}{dt} = R\alpha - Z\alpha_1 + Y\alpha_2,$$

et des expressions analogues pour les deux autres composantes.

56. **Calcul de l'accélération du premier ordre.** — Les composantes de l'accélération suivant les axes fixes ont pour expression $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$; on les obtient en

différentiant les deux membres de l'équation (6) et des équations analogues, après les avoir multipliés par ω. Toutefois, si l'on se borne à faire l'étude du mouvement au point de vue géométrique, il importe peu d'avoir l'accélération totale elle-même ; il suffit d'avoir la composante normale de cette accélération ; dans ce but, on remarque que la différentiation de l'expression $\frac{1}{\omega} \cdot \frac{dx}{dt}$ et des expressions analogues donne deux espèces de termes. Je prends par exemple $\frac{1}{\omega} \cdot \frac{dx}{dt}$; en différentiant, on obtient

$$-\frac{\omega'}{\omega^2} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d^2x}{dt^2};$$

or, le premier terme correspond à un vecteur dirigé suivant la tangente et dont, par conséquent, la projection sur la normale principale à la trajectoire est nulle ; il en résulte que, si l'on veut tout simplement l'accélération normale, il suffit de différentier le second membre de (6) et des équations analogues ; on substitue ainsi à l'accélération totale un vecteur qui a la même composante normale. Si γ_x, γ_y, γ_z sont les composantes de ce vecteur suivant les axes fixes, on aura

$$\gamma_x = \alpha(R' + Z) + \alpha_1(R + k - \omega Y) + \alpha_2(-X - \omega Z),$$

et des expressions analogues pour γ_y et γ_z.

On en conclut

$$(7) \qquad \begin{cases} \gamma_X = R' + Z, \\ \gamma_Y = R + k - \omega Y, \\ \gamma_Z = -X - \omega Z, \end{cases}$$

et la composante normale de l'accélération sera la même que celle du produit par ω du vecteur défini par les équations (7).

57. **Calcul de l'accélération du second ordre.** — En opérant d'une manière analogue pour l'accélération du second ordre, on voit que pour avoir la composante de cette accélération suivant la binormale à la trajectoire on peut, au vecteur qui la représente, substituer celui qu'on obtient en différentiant les expressions analogues à

$$\alpha(R' + Z) + \alpha_1(R + k - \omega Y) + \alpha_2(-X - \omega Z).$$

La différentiation de cette expression donne, après réduction au moyen des

formules (2),

$$\alpha[R'' - R - 2k + (\omega + \theta_1)Y] + \alpha_1[2R' + k' + (1 + \omega^2)Z - \omega'Y + (\omega - \theta)X]$$
$$+ \alpha_2[-\theta R + (\omega - \theta)k + h_1 - (1 + \omega^2)Y - \omega'Z].$$

Il en résulte que la composante de l'accélération du second ordre suivant la binormale est la même que celle du produit par ω, du vecteur dont les composantes suivant les axes mobiles sont

$$(8)\qquad \begin{cases} \Gamma_X = R'' - R - 2k + (\omega + \theta_1)Y, \\ \Gamma_Y = 2R' + k' + (1 + \omega^2)Z - \omega'Y + (\omega - \theta)X, \\ \Gamma_Z = -\theta R + (\omega - \theta)k + h_1 - (1 + \omega^2)Y - \omega'Z. \end{cases}$$

Dans ce numéro et dans le précédent on a posé

$$R' = \frac{dR}{dt}, \qquad R'' = \frac{d^2R}{dt^2}, \qquad \omega' = \frac{d\omega}{dt}.$$

58. **Conditions nécessaires pour caractériser un mouvement.** — Voici tout de suite des conséquences de ces divers résultats :

Le mouvement d'un corps solide assujetti à cinq conditions dépend de cinq fonctions, θ, θ_1, h, h_1, k. Les propriétés infinitésimales du premier ordre ne dépendent que du rapport

$$R = \frac{h - h_1}{\theta_1 - \theta};$$

celles du second ordre ne dépendent que de R, R', k et ω; enfin, il est visible sur les formules (8) qu'il faut aller jusqu'aux infiniment petits du troisième ordre pour définir complètement le mouvement, car, les cinq fonctions n'apparaissent toutes que dans l'accélération du second ordre.

Il suit de là que deux mouvements non identiques peuvent se correspondre de façon que les infiniment petits d'ordres 1 et 2 soient identiques; il faut aller jusqu'au troisième ordre pour caractériser complètement le mouvement.

59. **Applications.** — Cela posé, faisons quelques applications des formules trouvées. Cherchons d'abord le lieu des points pour lesquels l'accélération normale est nulle, c'est-à-dire le lieu des points dont les trajectoires ont un contact du deuxième ordre avec leur tangente; ou encore, le lieu des points d'inflexion des trajectoires. Il

suffit, pour obtenir ce lieu, d'exprimer que l'accélération totale est parallèle à la vitesse, ou, ce qui revient au même, que l'on a

$$(9) \qquad \frac{R' + Z}{R} = \frac{R + k - \omega Y}{-Z} = \frac{X + \omega Z}{Y}.$$

Il en résulte que les points cherchés sont, à chaque instant, distribués sur une cubique : c'est la *cubique d'inflexion.*

Lorsque $R = 0$, c'est-à-dire quand il y a roulement, et que de plus $R' \neq 0$, la cubique d'inflexion se réduit à la parabole

$$Z + R' = 0,$$
$$\frac{R + k - \omega Y}{-Z} = \frac{X + \omega Z}{Y};$$

elle se réduit à une droite si l'on a en même temps $R = 0$ et $R' = 0$.

Cherchons ensuite le lieu des points des trajectoires où la torsion est nulle, c'est-à-dire le lieu des points dont les trajectoires sont surosculées par leur plan osculateur. Pour ces points la vitesse, l'accélération première et l'accélération seconde sont parallèles au même plan ; il en résulte que le lieu de ces points sera la surface du troisième ordre représentée par l'équation

$$\begin{vmatrix} R & -Z & Y \\ R' + Z & R + k - \omega Y & -X - \omega Z \\ R'' - R - 2k + (\omega + \theta_1)Y & \begin{matrix} 2R' + k' + (1 + \omega^2)Z \\ -\omega' Y + (\omega - \theta)X \end{matrix} & \begin{matrix} -\theta R + (\omega - \theta)k + h_1 \\ -(1 + \omega^2)Y - \omega' Z \end{matrix} \end{vmatrix} = 0.$$

60. **Remarque I.** — La méthode suivie laisse de côté le cas où la surface base et la surface roulette sont des cylindres ; mais elle est applicable au cas où l'une d'elles est un plan : alors, l'autre est une surface développable.

61. **Remarque II.** — Il serait aisé avec les formules établies plus haut (n°s 56 et 57) d'obtenir les expressions de la courbure et de la torsion des trajectoires des divers points du corps. Le calcul ne présente ni difficulté ni intérêt ; je me bornerai à le faire dans le cas particulier du roulement. Dans ce cas on a $R = 0$, et les composantes de la vitesse sont

$$0, \qquad -\omega Z, \qquad \omega Y,$$

ce qui montre, et ce qui était du reste évident, que la vitesse est perpendiculaire à

l'axe AX. En se reportant aux formules (7) on voit que la composante normale de l'accélération du premier ordre provient uniquement du vecteur γ dont les composantes par rapport aux axes mobiles sont

$$Z, \qquad k - \omega Y, \qquad - X - \omega Z,$$

et qu'il faudra, bien entendu, multiplier par ω ; ce qui revient à dire que la composante normale de l'accélération provient uniquement du vecteur $\gamma\omega$. Or, si M est le point du corps que l'on considère (*fig.* 11), m sa projection sur le plan YAZ,

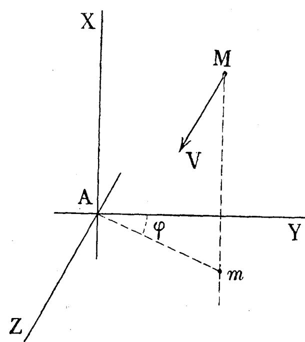


Fig. 11

la normale principale à la trajectoire du point M est dans le plan XAm; donc, pour définir la composante normale de l'accélération, il suffira de projeter $\gamma\omega$ sur Am et sur AX. Posons alors

$$Y = r \cos \varphi,$$

$$Z = r \sin \varphi,$$

et nous aurons :

suivant Am, $\quad \omega[k \cos \varphi - X \sin \varphi] - \omega^2[Y \cos \varphi + Z \sin \varphi]$,

c'est-à-dire

$$\omega[k \cos \varphi - X \sin \varphi] - \omega^2 r ;$$

et suivant AX,

$$\omega r \sin \varphi.$$

Si donc on appelle V la vitesse du point M et ρ le rayon de courbure en M de la trajectoire de ce point, on a

$$\frac{V^4}{\rho^2} = \omega^2[r^2 \sin^2 \varphi + (k \cos \varphi - X \sin \varphi - \omega r)^2];$$

et comme

$$V = \omega r,$$

il vient

$$\rho^2 = \frac{\omega^2 r^4}{r^2 \sin^2 \varphi + (k \cos \varphi - X \sin \varphi - \omega r)^2}.$$

Examinons en particulier le cas où le point M est situé dans le plan AXY, ce qui revient à supposer que la développable asymptote de la roulette est un cône; on vérifie facilement que *la vitesse est parallèle à* AZ et que *la normale principale est parallèle à* AY; on vérifie enfin que l'expression du rayon de courbure est

$$\rho = \frac{\omega Y^2}{k - \omega Y},$$

de sorte que tous les points situés sur une même parallèle à AX décrivent des trajectoires qui ont même courbure.

§ II. — Développable engendrée par un plan invariablement lié au corps

62. Je me bornerai ici à indiquer comment on peut obtenir les coordonnées d'un point de l'arête de rebroussement en fonction des invariants des deux surfaces.

Soit (ϖ) un plan invariablement lié au corps. Considérons-le à un instant donné

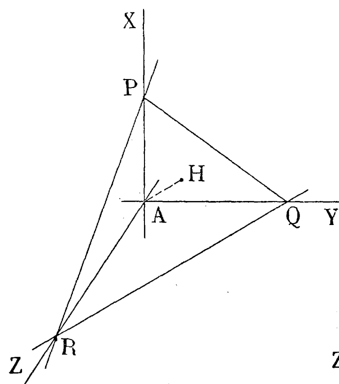


Fig. 12

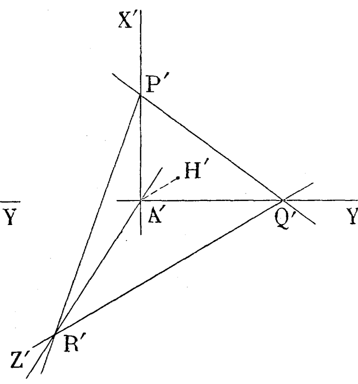


Fig. 13

et soient PQR (*fig.* 12) sa position par rapport au trièdre attaché à la base et P′Q′R′ (*fig.* 13) sa position par rapport au trièdre attaché à la roulette, ces deux trièdres étant eux-mêmes figurés à part, bien qu'ils soient constamment confondus. Menons AH et A′H′ perpendiculaires respectivement à PQR et à P′Q′R′ et appelons

p la longueur $AH = A'H'$;

a, b, c les cosinus directeurs de cette perpendiculaire par rapport au trièdre mobile.

Supposons d'abord que la roulette soit immobile et cherchons comment varie p quand le trièdre $(A'.X'Y'Z')$ se déplace sur cette surface ; pour cela nous remarquerons que le point H' se déplace toujours dans le plan P'Q'R', de sorte qu'il nous suffira d'exprimer que la vitesse du point H' est constamment perpendiculaire à la direction a, b, c. Or, les coordonnées du point H' par rapport au trièdre $(A'.X'Y'Z')$ sont

$$pa, \qquad pb, \qquad pc ;$$

donc les composantes de la vitesse de ce point par rapport au même trièdre ont pour expression (n° 1)

$$a\frac{dp}{dt} + p\frac{da}{dt} + h_1 - pb,$$

$$b\frac{dp}{dt} + p\frac{db}{dt} + pa + \theta_1 pc,$$

$$c\frac{dp}{dt} + p\frac{dc}{dt} + k - \theta_1 pb.$$

Si l'on ajoute, après avoir multiplié respectivement par a, b, c, on doit avoir

$$\frac{dp}{dt} + h_1 a + kc = 0,$$

c'est-à-dire

$$(1) \qquad \frac{dp}{dt} = - h_1 a - kc,$$

formule qui définit la variation de p quand la roulette est immobile.

Cela posé, remarquons qu'à l'instant considéré le plan (ϖ), supposé rapporté à l'un quelconque des trièdres $(A.XYZ)$ ou $(A'.X'Y'Z')$, a pour équation

$$(2) \qquad aX + bY + cZ - p = 0.$$

Désignons par le symbole δ toute variation correspondant à un déplacement du trièdre $(A'.X'Y'Z')$ et la roulette étant supposée fixe; soit de même δ_1 toute variation correspondant à un déplacement du trièdre $(A.XYZ)$ sur la base. Pour amener le plan (ϖ) d'une position à une autre, on peut concevoir que la roulette restant fixe le trièdre attaché à la roulette passe de la position $(A'.X'Y'Z')$ ou $(A.XYZ)$ à une position $(A'_1.X'_1Y'_1Z'_1)$; par rapport à ce nouveau trièdre, le plan qui n'a pas changé

de position dans l'espace, occupe une position $P'_1Q'_1R'_1$, et son équation est

$$(3) \qquad (a + \delta a)\,X + (b + \delta b)\,Y + (c + \delta C)\,Z - (p + \delta p) = 0.$$

On peut concevoir ensuite que la roulette se déplace de manière que $(A.XYZ)$ vienne en $(A_1.X_1Y_1Z_1)$ et par suite aussi $(A'_1.X'_1Y'_1Z'_1)$ en $(A_1.X_1Y_1Z_1)$; dans ce nouveau déplacement, les coefficients ne changent plus et l'on imprime à tous les points du plan le mouvement du système, de sorte que les nouvelles coordonnées

$$X + \delta_1 X, \qquad Y + \delta_1 Y, \qquad Z + \delta_1 Z$$

d'un point quelconque du plan devront satisfaire à l'équation (3), c'est-à-dire que l'on devra avoir

$$(a + \delta a)(X + \delta_1 X) + (b_1 + \delta b)(Y + \delta_1 Y) + (c + \delta c)(Z + \delta_1 Z) - (p + \delta p) = 0.$$

La combinaison de cette équation et de l'équation (2) donne, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier,

$$(4) \qquad X\delta a + Y\delta b + Z\delta c - \delta p + a\delta_1 X + b\delta_1 Y + c\delta_1 Z = 0.$$

Mais on a

$$\begin{cases} \delta a = b\delta t, \\ \delta b = -(a + \theta_1 c)\delta t, \\ \delta c = \theta_1 b.\delta t; \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta_1 X = (-h + Y)\delta t, \\ \delta_1 Y = (-X - \theta Z)\delta t, \\ \delta_1 Z = (-k + \theta Y)\delta t. \end{cases}$$

En substituant dans l'équation (4) on obtient après réduction,

$$(5) \qquad -cY + bZ - aR = 0;$$

il en résulte que la caractéristique de l'enveloppe est définie par les équations (2) et (5).

Pour définir maintenant l'arête de rebroussement, il suffit de voir ce que devient le plan (5) après un nouveau déplacement.

En vertu de ce qui précède, il pourra être remplacé par le plan

$$-Y\delta c + Z\delta b - R\delta a - c\delta_1 Y + b\delta_1 Z - a dR = 0,$$

ce qui donne finalement

$$(6) \qquad cX - \omega bY - (a + \omega c)Z - aR' - b(R + k) = 0.$$

En résumé, l'arête de rebroussement est définie par les équations (2), (5) et (6);

on voit en outre alors comment on pourrait obtenir les autres éléments de la développable.

§ III. — CALCUL DES INVARIANTS DES SURFACES RÉGLÉES ENGENDRÉES PAR LES DROITES DU CORPS

63. **Calcul de l'invariant** θ. — Soit D (*fig.* 14) une droite invariablement liée au corps et dont les cosinus par rapport au trièdre mobile sont a, b, c ; je poserai

$$(1) \qquad \begin{cases} a = \sin \varphi, \\ b = \cos \psi \cos \varphi, \\ c = \sin \psi \cos \varphi, \end{cases}$$

la signification des angles φ et ψ étant définie par la figure ci-dessous. J'appelle (R) la surface réglée engendrée par D, θ_2, h_2, k_2 ses invariants. Je vais d'abord calculer θ_2, c'est-à-dire déterminer le cône directeur de la surface. Pour cela, je commence

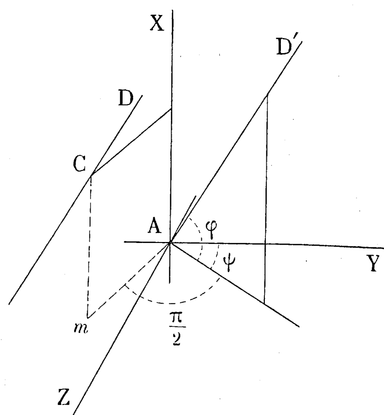


Fig. 14

par calculer l'arc σ de la représentation sphérique de la surface ; on l'obtient évidemment au moyen de la vitesse du point M de coordonnées a, b, c, abstraction faite de la translation de l'origine, de sorte que les composantes de cette vitesse sont

$$0, \qquad -\omega c, \qquad \omega b ;$$

on a donc

$$(2) \qquad d\sigma = \omega\sqrt{b^2 + c^2}\, dt = \omega \cos \varphi\, dt.$$

En exprimant d'ailleurs que la direction a, b, c est fixe dans le corps, on a

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{da}{dt} = b, \\ \dfrac{db}{dt} = -(a + \theta_1 c), \\ \dfrac{dc}{dt} = \theta_1 b, \end{cases}$$

ce qui donne, en remplaçant a, b, c par leurs valeurs (1),

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = \cos\psi, \\ \dfrac{d\psi}{dt} = \theta_1 + \operatorname{tg}\varphi \sin\psi. \end{cases}$$

Cela posé, je calcule les cosinus directeurs, par rapport aux axes mobiles, de la tangente à la représentation sphérique de la surface ou de son cône directeur, ainsi que ceux de la normale au plan tangent à ce cône ; j'appelle a_1, b_1, c_1 les premiers, a_2, b_2, c_2 les autres. a_1, b_1, c_1 sont proportionnels à $0, -\omega c, \omega b$; de sorte qu'on a

$$a_1 = 0, \qquad b_1 = -\sin\psi, \qquad c_1 = \cos\psi,$$

et l'on en déduit

$$a_2 = \cos\varphi, \qquad b_2 = -\sin\varphi\cos\psi, \qquad c_2 = -\sin\varphi\sin\psi.$$

On obtiendra alors l'invariant θ_2 en exprimant que la vitesse absolue du point a_2, b_2, c_2, abstraction faite de la translation de l'origine, est égale à

$$\theta_2 \frac{d\sigma}{dt}.$$

Prenons par exemple la composante de cette vitesse suivant AZ ; elle est égale d'une part à

$$\frac{dc_2}{dt} - \theta b_2,$$

d'autre part à

$$\theta_2 \frac{d\sigma}{dt} \cos\psi,$$

car elle est dirigée suivant la tangente à la représentation sphérique ; on doit donc

avoir

$$\frac{dc_2}{dt} - \theta b_2 = \theta_2 \frac{d\sigma}{dt} \cos \psi.$$

On en déduit, tous calculs faits,

$$(5) \qquad -\theta_2 = \frac{\sin \psi + \omega \sin \varphi \cos \varphi}{\omega \cos^2 \varphi}.$$

64. **Calcul des invariants h_2 et k_2.** — On les obtient en divisant par $d\sigma$ (n° 8) les composantes du déplacement du point central suivant la génératrice et suivant la normale au plan asymptote. Vérifions d'abord que le point central est, comme l'on sait, le pied de la perpendiculaire commune à la droite D et à l'axe hélicoïdal. Soit C (*fig.* 14) le pied de la perpendiculaire commune sur D et

$$m, \qquad -r \sin \psi, \qquad r \cos \psi$$

les coordonnées de ce point. ψ a déjà été défini ; quant à m et à r, ils représentent le premier l'élévation du point C par rapport au plan YAZ, et le second la longueur de la perpendiculaire commune. La vitesse du point C est la résultante de deux vitesses : celle du point sur la droite D et celle du point du corps qui coïncide avec le point C. Nous devons vérifier que la vitesse absolue du point C est perpendiculaire à la direction a_1, b_1, c_1 définie dans le numéro précédent ; or, la vitesse du point C sur la droite est perpendiculaire à a_1, b_1, c_1 ; il suffit donc de vérifier que la vitesse du point du corps qui coïncide avec le point C est elle-même perpendiculaire à a_1, b_1, c_1 ; mais les composantes de cette vitesse sont (n° 55)

$$\omega R, \qquad -\omega r \cos \psi, \qquad -\omega r \sin \psi,$$

et si l'on se reporte aux valeurs de a_1, b_1, c_1, on a évidemment

$$\omega(a_1 R - b_1 r \cos \psi - c_1 r \sin \psi) = 0.$$

On peut déterminer par cela même la valeur de k_2 ; car il suffit pour cela de projeter sur a_2, b_2, c_2 la vitesse du point central et de diviser ensuite par $\frac{d\sigma}{dt}$. On obtient ainsi

$$(6) \qquad k_2 = R + r \operatorname{tg} \varphi.$$

Il reste à calculer h_2. Pour cela, appelons $X_0 Y_0 Z_0$ un point fixe I_0 sur la droite D et ρ l'abscisse d'un point I mobile sur la droite, cette abscisse étant comptée sur

la droite à partir du point I_0. Les coordonnées du point I par rapport au trièdre (A.XYZ) sont

$$(7) \qquad \begin{cases} X = X_0 + a\rho, \\ Y = Y_0 + b\rho, \\ Z = Z_0 + c\rho, \end{cases}$$

et la vitesse de ce point est la résultante :

1° de la vitesse du point I sur la droite ;

2° de la vitesse du point du corps qui coïncide avec le point I.

Les composantes de la vitesse du point I sont donc

$$H + a\frac{d\rho}{dt},$$

$$-\omega Z + b\frac{d\rho}{dt},$$

$$\omega Y + c\frac{d\rho}{dt}.$$

Si ce point est le point central, la projection de sa vitesse sur D est

$$h_2 \omega \cos\varphi,$$

en vertu de la définition de h_2; on a donc, pour déterminer cet invariant, l'équation

$$(8) \qquad h_2\,\omega\cos\varphi = aH + \omega(cY - bZ) + \frac{d\rho}{dt}.$$

Tout revient donc maintenant à calculer la valeur de ρ qui correspond au point central ; mais le point central étant le pied de la perpendiculaire commune à D et à AX, on a

$$\rho = -\frac{bY_0 + cZ_0}{b^2 + c^2} = -\frac{Y_0\cos\psi + Z_0\sin\psi}{\cos\varphi},$$

ou encore

$$\rho\cos\varphi + Y_0\cos\psi + Z_0\sin\psi = 0.$$

En différentiant et en remplaçant $\frac{dX_0}{dt}$, $\frac{dY_0}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\psi}{dt}$ par leurs valeurs tirées soit des formules (2) du § I, soit des formules (4) du numéro 63, on en tire

$$\cos\varphi\frac{d\rho}{dt} = \rho\sin\varphi\cos\psi + (X_0 + \theta_1 Z_0)\cos\psi + (k - \theta_1 Y_0)\sin\psi$$
$$+ (Y_0\sin\psi - Z_0\cos\psi)(\theta_1 + \operatorname{tg}\varphi\sin\psi).$$

Or, pour le point central, on a

$$X_0 + \rho \sin \varphi = m,$$

et d'autre part la plus courte distance r est donnée par la formule

$$r = Z_0 \cos \psi - Y_0 \sin \psi ;$$

il en résulte

$$\cos \varphi \frac{d\rho}{dt} = m \cos \psi + k \sin \psi - r \operatorname{tg} \varphi \sin \psi,$$

et par conséquent, pour définir h_2, l'équation

$$(9) \quad h_2 \omega \cos \varphi = \omega R \sin \varphi - \omega r \cos \varphi + \frac{m \cos \psi + k \sin \psi}{\cos \varphi} - \frac{r \sin \varphi \sin \psi}{\cos^2 \varphi}.$$

Les formules (5), (6) et (9) définissent complètement la surface R.

§ IV. — Mouvement du trièdre attaché a une surface réglée. Détermination de la base et de la roulette

65. **Détermination de la roulette.** — Proposons-nous, comme application, de chercher la base et la roulette dans le mouvement d'un trièdre invariable attaché à une surface réglée (R). Soient θ, h, k les invariants de cette surface ; je rappelle que si (A.XYZ) est le trièdre attaché à la surface, les composantes, par rapport à ce trièdre, de la vitesse du point A sont

$$h, \qquad 0, \qquad k,$$

et celles de la rotation

$$-\theta, \qquad 0, \qquad 1 ;$$

il en résulte que les composantes, par rapport au même trièdre, de la vitesse d'un point X, Y, Z qui lui est invariablement lié, sont

$$h - Y, \qquad X + \theta Z, \qquad K - \theta Y.$$

L'axe du mouvement hélicoïdal, rapporté au même trièdre, est donc représenté par les équations

$$X + \theta Z = 0,$$

$$\frac{h - Y}{-\theta} = \frac{k - \theta Y}{1} ;$$

c'est-à-dire par les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} X + \theta Z = 0, \\ Y = \dfrac{h + \theta k}{1 + \theta^2}. \end{cases}$$

Ces deux équations définissent la *roulette.*

On voit que l'axe hélicoïdal est toujours parallèle au plan ZAX et s'appuie sur AY ; donc *le mouvement d'un trièdre invariable attaché à une surface réglée s'obtient en faisant rouler et glisser un conoïde droit sur une surface réglée.*

Pour définir complètement le conoïde, il suffit de calculer son paramètre de

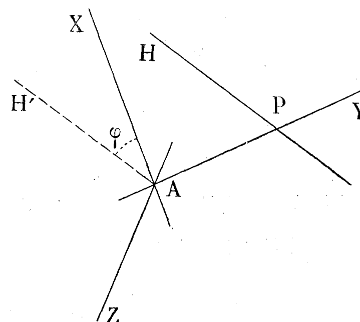


Fig. 15

distribution k_1. Pour cela soit PH l'axe instantané, l la distance AP et φ l'angle de PH avec AX (*fig.* 15) ; on a (n° 11, 3°)

$$k_1 = \frac{dl}{d\varphi} = \frac{dl}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi}.$$

Pour déterminer φ on remarque que la projection AH′ de PH sur le plan ZAX est représentée d'une part par

$$X - Z \operatorname{cotg} \varphi = 0,$$

et, d'autre part, par

$$X + \theta Z = 0 ;$$

on a donc

$$(2)\qquad \operatorname{cotg} \varphi = - \theta,$$

et l'on en tire

$$(3)\qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\theta'}{1 + \theta^2},$$

c'est-à-dire précisément la torsion de la représentation sphérique de (R).

Les équations (1) donnent d'ailleurs

$$l = \frac{h + \theta k}{1 + \theta^2};$$

d'où

$$\frac{dl}{dt} = \frac{(1 + \theta^2)(h' + \theta k' + k\theta') - 2\theta\theta'(h + \theta k)}{(1 + \theta^2)^2},$$

et, par suite,

$$(4) \qquad k_1 = \frac{h' + \theta k'}{\theta'} + \frac{k - 2\theta h - \theta^2 k}{1 + \theta^2}.$$

66. **Détermination de la base.** — Soient maintenant θ_2, h_2, k_2 les invariants de la base et soient par rapport au trièdre fixe ($O.xyz$) ;

a, b, c les cosinus directeurs de l'axe hélicoïdal PH ;

a_1, b_1, c_1 les cosinus directeurs de la tangente à la représentation sphérique du cône directeur de la base ;

a_2, b_2, c_2 ceux de la normale au plan tangent au même cône.

On a

$$(5) \qquad \begin{cases} a = \alpha \cos\varphi + \alpha_2 \sin\varphi, \\ b = \beta \cos\varphi + \beta_2 \sin\varphi, \\ c = \gamma \cos\varphi + \gamma_2 \sin\varphi, \end{cases}$$

et si l'on appelle σ l'arc de la représentation sphérique de la base, on a aussi

$$\frac{da}{d\sigma} = a_1,$$

c'est-à-dire

$$\frac{da}{dt} \cdot \frac{dt}{d\sigma} = a_1.$$

Or, en différentiant les équations (5), on obtient

$$\frac{da}{dt} = (-\alpha \sin\varphi + \alpha_2 \cos\varphi)\frac{d\varphi}{dt} + \alpha_1(\cos\varphi + \theta \sin\varphi);$$

mais dans cette équation, en vertu de l'équation (2), le coefficient de α_1 est nul ; il en résulte que la direction a_1, b_1, c_1 est menée dans le plan ZAX et fait avec AX l'angle $\varphi + \frac{\pi}{2}$, de sorte que l'on a

$$\begin{aligned} a_1 &= -\alpha \sin\varphi + \alpha_2 \cos\varphi, \\ b_1 &= -\beta \sin\varphi + \beta_2 \cos\varphi, \\ c_1 &= -\gamma \sin\varphi + \gamma_2 \cos\varphi, \end{aligned}$$

et l'équation précédente devient

$$\frac{da}{dt} = a_1 \frac{d\varphi}{dt}.$$

En comparant avec

$$\frac{da}{dt} = a_1 \frac{d\sigma}{dt},$$

on en conclut

$$d\sigma = d\varphi\,;\ (^1)$$

on conclut aussi, de ce que la direction a_1, b_1, c_1 est dans le plan ZAX, que l'on a

$$a_2 = \alpha_1, \qquad b_2 = \beta_1, \qquad c_2 = \gamma_1.$$

L'invariant θ_2 s'en déduit immédiatement.

On a en effet

$$\theta_2 = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{da_2}{d\sigma} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{da_2}{dt} \cdot \frac{dt}{d\sigma}\,;$$

mais

$$\frac{da_2}{dt} = -(\alpha + \theta\alpha_2) = \frac{-\alpha \sin\varphi + \alpha_2 \cos\varphi}{\sin\varphi}\,;$$

il en résulte

$$\theta_2 = \frac{\sqrt{1+\theta^2}}{\theta'}.$$

Si l'on appelle ρ et τ le rayon de courbure et le rayon de torsion de la représentation sphérique de la surface (R), on voit (n° 6) que

$$\theta_2 = \rho.\tau.$$

Calculons maintenant h_2 et k_2. Pour cela, appelons x_1, y_1, z_1 les coordonnées absolues de P, c'est-à-dire du point central de la base, et x, y, z les coordonnées absolues du point A. On a

$$x_1 = x + l\alpha_1,$$

d'où

$$\frac{dx_1}{d\varphi} = \frac{dx_1}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi} = \frac{1}{\varphi'}\left[\alpha(h-l) + \alpha_1 \frac{dl}{dt} + \alpha_2(k - \theta l)\right],$$

ce qui montre que les composantes de la vitesse du point P, en supposant que φ soit la variable indépendante, sont, par rapport au trièdre (A.XYZ),

$$\frac{h-l}{\varphi'}, \qquad \frac{l'}{\varphi'}, \qquad \frac{k-\theta l}{\varphi'},$$

(1) Ces formules sont d'ailleurs évidentes *a priori* parce que la base et la roulette se raccordent.

l' et φ' désignant les dérivées de l et de φ par rapport à t. On vérifie aisément que le point P est le point central de la base en vérifiant que la vitesse du point P est perpendiculaire à la direction a_1, b_1, c_1.

Pour obtenir h_2 et k_2 il suffit de projeter sur a, b, c et sur a_2, b_2, c_2 le vecteur dont les composantes par rapport au trièdre (A.XYZ) sont

$$\frac{h-l}{\varphi'}, \qquad \frac{l'}{\varphi'}, \qquad \frac{k-\theta l}{\varphi'}.$$

En projetant sur a_2, b_2, c_2, c'est-à-dire sur AY, on obtient

$$k_2 = \frac{l'}{\varphi'},$$

ce qui devait être puisque $k_2 = k_1$; en projetant ensuite sur a, b, c, dont les cosinus directeurs par rapport au trièdre (A.XYZ) sont

$$\cos\varphi, \qquad 0, \qquad \sin\varphi,$$

on obtient de même

$$h_2 = \frac{1}{\varphi'}\Big[(h-l)\cos\varphi + (k-\theta l)\sin\varphi\Big],$$

et finalement

$$h_2 = (k-\theta h)\frac{\sqrt{1+\theta^2}}{\theta'}.$$

En résumé, on a, pour la roulette,

$$\theta_1 = 0, \qquad h_1 = 0, \qquad k_1 = k + \frac{h'+\theta k'}{\theta'} - \frac{2\theta(h+\theta k)}{1+\theta^2};$$

et pour la base,

$$\theta_2 = \frac{\sqrt{1+\theta^2}}{\theta'},$$

$$h_2 = (k-\theta h)\frac{\sqrt{1+\theta^2}}{\theta'},$$

$$k_2 = k_1.$$

67. **Cas particuliers**. — 1° Pour que $h_2 = 0$, il faut que l'on ait

$$k = \theta h,$$

c'est-à-dire que la ligne de striction de la surface (R) soit ligne de courbure de cette surface ; d'ailleurs $h_1 = h_2 = 0$; donc *quand la ligne de striction de la surface décrite par* AX *est une ligne de courbure de cette surface, on obtient le mouvement du trièdre attaché à la surface en faisant rouler un conoïde droit sur un lieu de binormales.*

2° Supposons $h + \theta k = 0$; alors la roulette est un plan, car $l = 0$; donc la base est une surface développable. Mais $h + \theta k = 0$ signifie que la ligne de striction de (R) est une ligne asymptotique de la surface ; on voit donc que dans ce cas le mouvement du trièdre *s'obtient en faisant rouler un plan sur une surface développable tout en le faisant glisser*.

On détermine du reste sans difficulté le rayon de courbure ρ et le rayon de torsion τ de l'arête de rebroussement de la développable : on a en effet

$$\rho = h_2 = \frac{k(1+\theta^2)^{3/2}}{\theta'},$$

$$\tau = \frac{\rho}{\theta_2} = \frac{(1+\theta^2)^{1/2}}{\theta'} = k(1+\theta^2).$$

§ V. — Problème des roulettes

68. Dans les chapitres précédents on a vu comment, connaissant la base et la roulette, on peut déterminer soit la trajectoire d'un point quelconque, soit l'enveloppe d'un plan, soit la surface réglée décrite par une droite du corps. Je me propose maintenant de résoudre quelques problèmes inverses.

69. **Problème I**. — *On donne la surface base et la trajectoire d'un point, trouver la roulette.*

Il faut d'abord établir la correspondance entre les points de la trajectoire et les

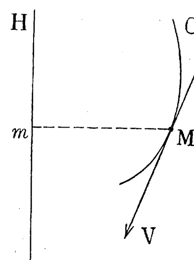


Fig. 16

génératrices de la base. A cet effet, soient (*fig.* 16) H l'axe hélicoïdal et M le point décrivant à un instant donné; H est justement la génératrice de la base qui correspond au point M de la trajectoire donnée C. Soit Mm la perpendiculaire à H ; la vitesse absolue du point M, c'est-à-dire la tangente à la trajectoire, est la résultante

d'une translation parallèle à H et d'une rotation autour de H; par conséquent elle est perpendiculaire à Mm.

Ainsi *la tangente en un point* M *de la trajectoire doit être normale à la perpendiculaire menée de ce point sur l'axe hélicoïdal, c'est-à dire sur la génératrice de la base qui correspond au point* M.

Ceci établit évidemment la correspondance cherchée; on voit en effet que si M est un point de la trajectoire, pour avoir les génératrices de la base qui correspondent à ce point il suffit de mener le plan normal en M à la courbe C et de prendre sur la section déterminée dans la base un point m tel que la génératrice de la base qui passe par ce point soit normale à Mm.

Le calcul va nous conduire au même résultat.

Figurons en effet à part en (A.XYZ) et en $(A_1.X_1Y_1Z_1)$ (*fig.* 17 et 18) les trièdres attachés aux deux surfaces; soient $(O.xyz)$ un trièdre fixe dans l'espace absolu et $(O_1.x_1y_1z_1)$ un trièdre fixe dans le corps. Appelons C la trajectoire, ξ, η, ζ les coor-

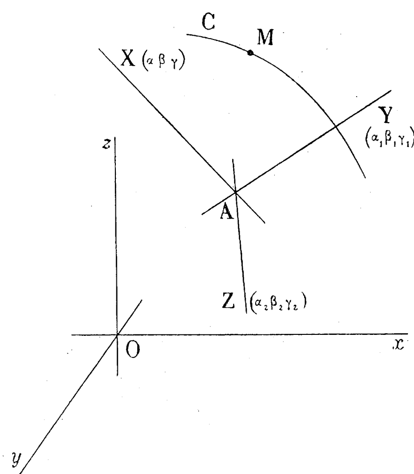


Fig. 17

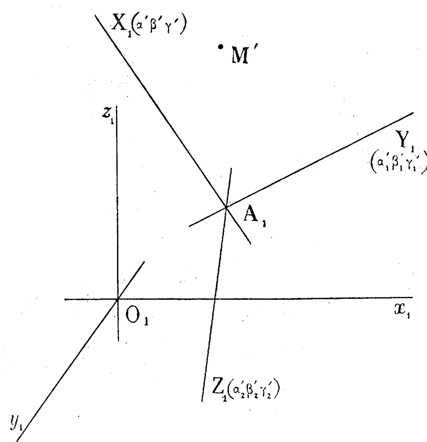


Fig. 18

données du point A par rapport au trièdre $(O.xyz)$ et ξ_1, η_1, ζ_1 celles du point A_1 par rapport au trièdre $(O_1.x_1y_1z_1)$. Soit enfin M′ le point du corps qui est en M à l'instant t et X, Y, Z ses coordonnées par rapport au trièdre (A.XYZ). Je détermine les neuf cosinus directeurs du trièdre (A.XYZ) rapporté aux axes $(O.xyz)$ au moyen du tableau du numéro 1; les cosinus directeurs du trièdre $(A_1\ X_1Y_1Z_1)$ seront déterminés par le même tableau où toutes les lettres sont accentuées.

Les coordonnées absolues d'un point quelconque de la trajectoire sont des fonc-

tions du même paramètre λ, de sorte qu'en les appelant x, y, z on peut poser

$$(1) \qquad \begin{cases} x = f(\lambda), \\ y = \varphi(\lambda), \\ z = \psi(\lambda). \end{cases}$$

Pour établir la correspondance entre les points de la courbe et les génératrices de la base, il suffit évidemment d'obtenir une relation entre λ et t (t sera du reste toujours l'arc de la représentation sphérique de la base); car si l'on connaît λ en fonction de t, comme l'on suppose connus $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ en fonction de t, on aura au moyen de ces quantités et des équations (1) les valeurs de X, Y, Z au moyen de t.

Or, le point M′ étant fixe dans le corps, on a (n° 55)

$$(2) \qquad \begin{cases} \frac{dX}{dt} = -h_1 + Y, \\ \frac{dY}{dt} = -X - \theta_1 Z, \\ \frac{dZ}{dt} = -k + \theta_1 Y. \end{cases}$$

Dans ces relations la roulette n'entre que par h_1 et θ_1; en les éliminant on a

$$(3) \qquad Y\frac{dY}{dt} + Z\frac{dZ}{dt} + XY + kZ = 0.$$

Je vais montrer que cette relation exprime précisément que la tangente en M à la courbe C est normale à Mm; en effet, les composantes de la vitesse du point M sur la courbe C prises par rapport au trièdre (A.XYZ) attaché à la base sont proportionnelles (n° 55) à

$$(3) \qquad \begin{cases} h - Y + \frac{dX}{dt}, \\ X + \theta Z + \frac{dY}{dt}, \\ k - \theta Y + \frac{dZ}{dt}; \end{cases}$$

d'autre part, la direction Mm est définie par

$$0, \qquad Y, \qquad Z,$$

et si l'on exprime que les deux directions sont rectangulaires, on retrouve bien l'équation (3).

Cela posé, on a

$$(4)\qquad \begin{cases} X = \alpha(x-\xi) + \beta(y-\eta) + \gamma(z-\zeta), \\ Y = \alpha_1(x-\xi) + \beta_1(y-\eta) + \gamma_1(z-\zeta), \\ Z = \alpha_2(x-\xi) + \beta_2(y-\eta) + \gamma_2(z-\zeta), \end{cases}$$

et l'on en tire

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = -h + Y + \left(\alpha\dfrac{dx}{d\lambda} + \beta\dfrac{dy}{d\lambda} + \gamma\dfrac{dz}{d\lambda}\right)\dfrac{d\lambda}{dt}, \\ \dfrac{dY}{dt} = -X - \theta Z + \left(\alpha_1\dfrac{dx}{d\lambda} + \beta_1\dfrac{dy}{d\lambda} + \gamma_1\dfrac{dz}{d\lambda}\right)\dfrac{d\lambda}{dt}, \\ \dfrac{dZ}{dt} = \theta Y - k + \left(\alpha_2\dfrac{dx}{d\lambda} + \beta_2\dfrac{dy}{d\lambda} + \gamma_2\dfrac{dz}{d\lambda}\right)\dfrac{d\lambda}{dt}. \end{cases}$$

Je remplace ces diverses quantités par leurs valeurs dans l'équation (3), ce qui donne

$$(6)\qquad Y\left(\alpha_1\frac{dx}{d\lambda} + \beta_1\frac{dy}{d\lambda} + \gamma_1\frac{dz}{d\lambda}\right) + Z\left(\alpha_2\frac{dx}{d\lambda} + \beta_2\frac{dy}{d\lambda} + \gamma_2\frac{dz}{d\lambda}\right) = 0,$$

Y et Z étant définies par (4). — Dans le calcul on supprime la solution évidente $\dfrac{d\lambda}{dt} = 0$, qui correspond au cas où le point M serait fixe sur C, car alors sa vitesse serait nulle et par suite perpendiculaire à n'importe quelle direction.

L'équation (6) définit λ en fonction de t et alors dans les équations (4) on peut supposer que tout est exprimé aussi en fonction de t.

Le problème se trouve ainsi ramené au suivant :

Trouver une surface réglée, la roulette, telle qu'un point invariablement lié à cette surface ait des coordonnées données à l'avance par rapport au trièdre qui lui est attaché et connaissant le paramètre de distribution de cette surface.

Les équations (2) résolvent immédiatement le problème, car la première fait connaître h_1, et l'une quelconque des deux autres, θ_1. On commencera alors par déterminer au moyen de θ_1 le cône directeur de la roulette, ce qui nécessitera l'intégration d'une équation de Riccati (n° 7). Il semble d'ailleurs impossible d'éviter cette intégration, mais il est digne de remarque que *le cône directeur une fois déterminé, la roulette se détermine sans quadratures.*

En effet, on peut toujours supposer que le point M' soit confondu avec le point O_1, de sorte que l'on connaît les coordonnées du point O_1 par rapport au trièdre $(A_1.X_1Y_1Z_1)$; d'autre part, puisque le cône directeur de la roulette est sup-

posé déterminé, on connait α', β', γ'; α'_1, β'_1, γ'_1; α'_2, β'_2, γ'_2; ce qui revient à dire que l'on connaît ξ_1, η_1, ζ_1 et les cosinus directeurs de A_1X_1 par rapport au trièdre $(O_1.x_1y_1z_1)$, et alors la roulette se trouve définie. D'ailleurs on a

$$-\xi_1 = \alpha'X + \alpha'_1Y + \alpha'_2Z,$$
$$-\eta_1 = \beta'X + \beta'_1Y + \beta'_2Z,$$
$$-\zeta_1 = \gamma'X + \gamma'_1Y + \gamma'_2Z.$$

Je donne à la fin de ce travail une application de ce problème à un exemple particulier.

70. **Cas particuliers.** — Je suppose que C soit une droite, mais sans spécifier la position de cette droite dans l'espace. Dans ce cas, X, Y, Z doivent vérifier les équations (2) et les équations de la cubique d'inflexion (n° 59) représentée par les équations

$$\frac{R' + Z}{R} = \frac{R - \omega Y + k}{-Z} = \frac{\omega Z + X}{Y} \tag{7}$$

et où

$$R = \frac{h - h_1}{\theta_1 - \theta}.$$

Lorsque R n'est pas nul, on voit facilement que ces deux systèmes d'équations ne peuvent avoir plus de deux solutions communes ; car si trois droites sont données d'une manière quelconque dans l'espace, il n'est pas possible d'assujettir trois points d'un corps solide à les décrire.

Supposons $R = 0$, c'est-à-dire, examinons le cas du roulement ; dans ce cas la cubique d'inflexion se réduit à

$$Z = 0, \qquad Y = \frac{k}{\omega},$$

qui doivent vérifier les équations (2). En remplaçant dans la troisième on voit d'abord qu'il faut que l'on ait

$$\omega = \theta_1,$$

et par suite

$$\theta = 0.$$

Ainsi, *la base doit être une surface à plan directeur*, résultat évident *a priori* ; car la vitesse reste toujours perpendiculaire à l'axe hélicoïdal, et comme la trajectoire est une droite, la vitesse est dirigée suivant cette droite ; donc l'axe hélicoïdal est perpendiculaire à une direction fixe, et il décrit une surface à plan directeur.

En remplaçant maintenant dans les deux premières, on doit avoir

$$h_1 - \frac{d^2\left(\frac{k}{\theta_1}\right)}{dt^2} = \frac{k}{\theta_1}. \tag{8}$$

On a ainsi la relation à laquelle doit satisfaire la roulette pour qu'un point du corps puisse décrire une droite dans le cas où il y a roulement. Si d'ailleurs cette condition est remplie, il n'y a qu'un seul point décrivant une droite, comme on le voit en remontant la suite des calculs.

L'équation (8) permet *de déterminer tous les mouvements de roulement dans lesquels un point décrit une droite*; il suffit pour cela de choisir la roulette de manière à vérifier l'équation (8), la base étant bien entendu à plan directeur.

On peut, par exemple, se donner arbitrairement le cône directeur de la roulette; alors l'équation (8) fait connaître h_1 puisque k est donné avec la base; la roulette s'obtient ensuite par des quadratures.

Si, au lieu du cône directeur, on se donnait h_1, il faudrait d'abord intégrer l'équation (8), puis une équation de Riccati et enfin effectuer les mêmes quadratures pour achever de déterminer la roulette. On voit qu'il y a toujours avantage à se donner le cône directeur.

71. **Problème II.** — *On donne le cône directeur de la surface base et l'on propose de déterminer cette surface ainsi que la roulette, connaissant les trajectoires de deux points du corps.*

Soient C et C_1 (*fig.* 19) les deux trajectoires connues rapportées au trièdre fixe $(O.xyz)$ et soit $(O.X'Y'Z')$ le trièdre de sommet O parallèle au trièdre $(A.XYZ)$ attaché à la base. Le cône directeur de cette surface étant connu, on connaît en fonction de t le mouvement du trièdre $(O.X'Y'Z')$. Soient alors

$$\left\{\begin{aligned} x &= f(\lambda), \\ y &= \varphi(\lambda), \\ z &= \psi(\lambda) \end{aligned}\right. \tag{1}$$

les équations de C par rapport aux axes fixes et soient de même

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= f(\lambda_1), \\ y_1 &= \varphi(\lambda_1), \\ z_1 &= \psi(\lambda_1) \end{aligned}\right. \tag{2}$$

celles de C_1. Si M et M_1 sont les positions des points décrivant à un instant donné,

en écrivant que $MM_1 = \text{const.}$, on aura une relation entre λ et λ_1; de sorte que l'on pourra supposer x_1, y_1 et z_1 exprimés, comme x, y et z, en fonction de λ.

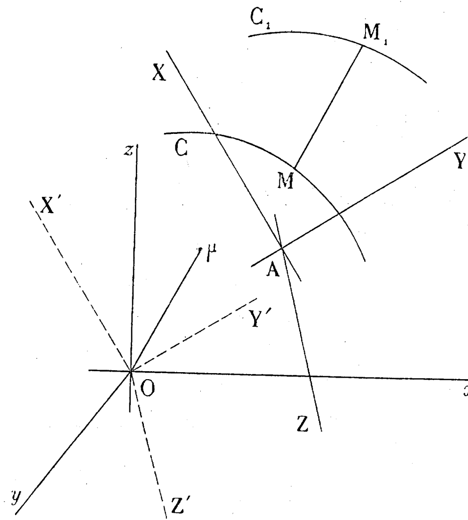


Fig. 19

Appelons x', y', z' les projections du segment MM_1 sur les axes fixes; on a

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= x_1 - x, \\ y' &= y_1 - y, \\ z' &= z_1 - z, \end{aligned} \right.$$

et ces projections sont ainsi exprimées en fonction de λ; par suite si X', Y', Z' sont les projections du même segment sur les arêtes du trièdre $(O.X'Y'Z')$, ces quantités seront aussi des fonctions de λ définies par les équations

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} X' &= \alpha x' + \beta y' + \gamma z', \\ Y' &= \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z', \\ Z' &= \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z'. \end{aligned} \right.$$

On peut supposer que $(O.X'Y'Z')$ soit un trièdre parallèle à celui qui est attaché à la roulette, et alors, on peut regarder X', Y', Z' comme les coordonnées d'un point fixe dans le corps; en exprimant cette condition, on voit que X', Y', Z'

doivent satisfaire aux équations

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dX'}{dt} &= Y'. \\ \frac{dY'}{dt} &= -\theta_1 Z' - X', \\ \frac{dZ'}{dt} &= \theta_1 Y'. \end{aligned}\right.$$

Ces équations doivent se réduire à deux, car la longueur MM_1 étant constante, on doit avoir

$$(6)\qquad X' \frac{dX'}{dt} + Y' \frac{dY'}{dt} + Z' \frac{dZ'}{dt} = 0;$$

or, si l'on ajoute les équations (5) après les avoir multipliées respectivement par X', Y', Z', on trouve bien l'équation (6).

Cela posé, si dans la première des équations (5) on remplace X' et Y' par leurs valeurs tirées de (4), on a l'équation

$$(7)\qquad \alpha \frac{dx'}{d\lambda} + \beta \frac{dy'}{d\lambda} + \gamma \frac{dz'}{d\lambda} = 0,$$

qui définit λ en fonction de t, c'est-à-dire, qui établit la correspondance entre les points décrivants et l'axe hélicoïdal.

On aurait pu écrire cette équation *a priori* ; car si sur la parallèle à MM_1 menée par O on porte $O\mu = MM_1$, le mouvement de $O\mu$ est une rotation autour de OX' ; et comme $MM_1 = \text{const.}$, la vitesse du point μ est perpendiculaire à OX' ; c'est précisément ce qu'exprime l'équation (7). D'après cela, on comprend la présence de la solution $\dfrac{d\lambda}{dt} = 0$ qu'on trouve dans le courant du calcul et qui a été supprimée.

L'équation (7) définissant λ en fonction de t, en revenant aux équations (4) on voit que X', Y', Z' seront aussi connues en fonction de la même variable ; en remplaçant ensuite dans l'une quelconque des deux dernières équations (5) on en déduit l'expression de θ_1 en fonction de t. Je vais montrer que le problème proposé se trouve alors ramené aux quadratures.

72. **Détermination du cône directeur de la roulette.** — Pour cela je remarque d'abord que θ_1 étant connu en fonction de t, si l'on appelle α', β', γ' ; α'_1, β'_1, γ'_1 ; α'_2, β'_2, γ'_2 les cosinus directeurs du trièdre attaché à la roulette et rapporté aux

axes $(O_1.x_1y_1z_1)$, fixes dans le corps, on a

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha'}{dt} = \alpha'_1, \\ \dfrac{d\alpha'_1}{dt} = -(\alpha' + \theta_1\alpha'_2), \\ \dfrac{d\alpha'_2}{dt} = \theta_1\alpha, \end{cases}$$

et la détermination du cône directeur est ramenée à l'intégration de ce système d'équations ; mais cette intégration se ramène elle-même, comme on sait, à celle de l'équation

$$(9)\qquad \frac{du}{dt} = iu + \frac{i\theta_1}{2}\left(1 - u^2\right).$$

Or, le système (8) est identique au système (5) ; par conséquent on connaît une solution de ce système (8) et par suite aussi une solution de l'équation (9) fournie par les valeurs de X′, Y′, Z′ données par les formules (4). On achèvera donc l'intégration par des quadratures.

73. **Détermination de la base.** — La détermination de la base revient au calcul des coordonnées ξ, η, ζ du point A par rapport au trièdre $(O.xyz)$. Pour cela on calcule d'abord les coordonnées X, Y, Z du point M par rapport au trièdre (A.XYZ). A cet effet, on remarque que l'on connaît x, y, z en fonction de t et par suite la vitesse du point M. Soient V_Y, V_Z les composantes de cette vitesse suivant les arêtes AY et AZ du trièdre (A.XYZ) ; on a vu que

$$V_Y = -\omega Z,$$
$$V_Z = \omega Y,$$

d'où l'on tire Y et Z. D'autre part, on a aussi

$$\frac{dY}{dt} + X + \theta_1 Z = 0,$$

qui donne *ensuite* la valeur de X. Cela fait, on aura ξ, η et ζ au moyen des formules

$$x = \xi + \alpha X + \alpha_1 Y + \alpha_2 Z,$$
$$y = \eta + \beta X + \beta_1 Y + \beta_2 Z,$$
$$z = \xi + \gamma X + \gamma_1 Y + \gamma_2 Z.$$

74. **Détermination de la roulette.** — La détermination de la roulette s'achève aussi sans difficulté. On connaît en effet les neuf cosinus des arêtes du trièdre attaché à cette surface puisqu'on a déterminé son cône directeur ; d'autre part, on connaît, d'après ce qui précède (n° 73) X, Y, Z en fonction de t, de sorte que si l'on appelle ξ_1, η_1, ζ_1 les coordonnées du point central de la roulette rapportées au trièdre $(O_1.x_1y_1z_1)$, et si l'on suppose que le point M du corps soit confondu avec l'origine O_1, on a

$$\xi_1 + \alpha' X + \alpha'_1 Y + \alpha'_2 Z = 0,$$

$$\eta_1 + \beta' X + \beta'_1 Y + \beta'_2 Z = 0,$$

$$\zeta_1 + \gamma' X + \gamma'_1 Y + \gamma'_2 Z = 0,$$

qui achèvent de définir la roulette.

75. **Remarque I.** — On voit qu'une fois le cône directeur de la roulette déterminé, le problème s'achève sans quadratures. Il est facile de s'en rendre compte ; en effet, connaissant la vitesse d'un point du corps et les composantes de la rotation, on peut déterminer AX, c'est-à-dire l'axe hélicoïdal ; or, cette droite décrit une surface réglée dont le point central s'obtient par de simples différentiations.

76. **Remarque II.** — On peut voir autrement que la solution du problème se ramène aux quadratures. Soit en effet $(O.xyz)$ (*fig.* 20) le trièdre fixe, et $O\mu$ la droite

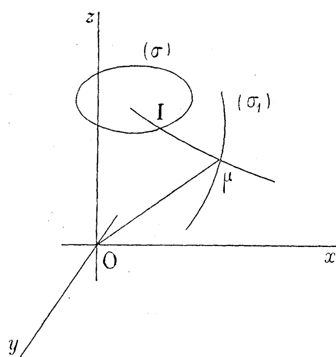


Fig. 20

égale et parallèle à MM_1 menée par le point O. Le point μ décrit une courbe sphérique connue (σ_1) puisque l'on connaît les coordonnées absolues de ce point (n° 71). Soit (σ) la trace du cône directeur de la base sur la même sphère ; si l'on imagine le trièdre de sommet O parallèle à celui qui est attaché à la roulette, on voit que la

détermination du cône directeur de cette surface est ramenée au problème suivant : *Dans le mouvement d'un solide autour d'un point fixe, on connaît le cône base par sa représentation sphérique* (σ), *la trajectoire* (σ_1) *d'un point de la même sphère, trouver le cône roulette.* Le problème se ramène ainsi à résoudre sur la sphère un problème analogue au suivant dans le plan : *Connaissant la base et la trajectoire d'un point, trouver la roulette.*

Soit alors (σ) la base sur la sphère de rayon $O\mu$, (σ_1) la trajectoire et soit à un instant donné μ la position du point décrivant ; le grand cercle normal à (σ_1) au point μ doit passer par le centre instantané de rotation sur la sphère, ce qui définit la correspondance entre les points de la trajectoire et ceux de la base. Soit I le point de la base qui correspond au point μ, V l'angle sous lequel le grand cercle normal μI à (σ_1) rencontre la base ; la correspondance donnera une relation entre l'arc μI et l'angle V, c'est-à-dire, si l'on veut, l'équation polaire de la roulette

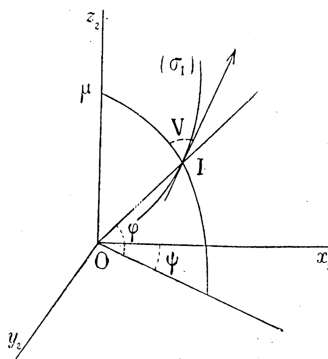


Fig. 21

en prenant comme pôle le point décrivant. Supposons par exemple $O\mu = 1$ et soit $\mu I = \frac{\pi}{2} - \varphi$; on pourra supposer que la relation précédente qui définit la roulette soit de la forme

$$\operatorname{tg} V = f(\varphi).$$

Imaginons la roulette rapportée à trois axes rectangulaires $(O.x_2y_2z_2)$ dont l'un passe par le point μ (*fig.* 21) et soient φ et ψ les angles polaires du point I ; les coordonnées de ce point sont

$$\cos\varphi\cos\psi, \qquad \cos\varphi\sin\psi, \qquad \sin\varphi,$$

et par suite les composantes de la vitesse du point I sur la roulette ont pour ex-

pressions respectives

$$-\sin\varphi\cos\psi\frac{d\varphi}{dt}-\sin\psi\cos\varphi\frac{d\psi}{dt},$$

$$-\sin\varphi\sin\psi\frac{d\varphi}{dt}+\cos\varphi\cos\psi\frac{d\psi}{dt},$$

$$\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt};$$

ses composantes suivant les tangentes en I au méridien et au parallèle de ce point sont donc

$$\frac{d\varphi}{dt} \qquad \text{et} \qquad \cos\varphi\frac{d\psi}{dt};$$

on en déduit

$$\operatorname{tg} V = \cos\varphi\frac{d\psi}{d\varphi}.$$

La comparaison avec la première expression de tg V nous donne finalement

$$\psi = \int\frac{f(\varphi)}{\cos\varphi}\,d\varphi$$

et montre bien que le problème se ramène aux quadratures.

77. **Remarque III**. — Le problème II est véritablement l'analogue du problème suivant de géométrie plane :

Connaissant la base et la trajectoire d'un point, trouver la roulette; car on connaît en réalité deux trajectoires : la trajectoire donnée et le point à l'infini sur la perpendiculaire au plan de la base. C'est ce qui explique pourquoi le problème se ramène aux quadratures.

78. **Problème III**. — *Connaissant la base et la surface engendrée par une droite, trouver la roulette.*

Soit (S) la surface réglée donnée et soit G la position de la génératrice de la surface à un instant donné (*fig.* 22). Il faut d'abord établir la correspondance entre la droite G et les génératrices de la surface base. Or, si H est l'axe hélicoïdal au même instant, nous avons vu que le point central sur G est le pied de la perpendiculaire RC à H et à G ; d'autre part, la vitesse du point C qui est la résultante de trois vitesses perpendiculaires à RC est elle-même perpendiculaire à RC ; donc RC doit être normale en C à la surface donnée (S). *Il suit de là que le problème proposé*

n'est possible que si les normales à la surface donnée le long de la ligne de striction rencontrent à angle droit les génératrices de la base.

Si cette condition est remplie, on établit ainsi une relation entre les généra-

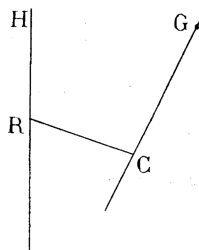


Fig. 22

trices de (S) et celles de la base ; de sorte que l'on peut supposer G définie en fonction de t. Soient alors a, b, c les cosinus directeurs de G par rapport aux trièdres (A.XYZ) ou (A'.X'Y'Z') attachés soit à la base, soit à la roulette ; ils vérifient les relations

$$\frac{da}{dt} = b,$$
$$\frac{db}{dt} = -(a + \theta_1 c),$$
$$\frac{dc}{dt} = \theta_1 b;$$

et, comme a, b, c sont connus en fonction de t, ces relations donnent θ_1 ; on doit d'ailleurs avoir par suite de la condition de possibilité du problème

$$b\frac{db}{dt} + c\frac{dc}{dt} + ab = 0.$$

θ_1 étant connu, on achève la détermination du cône directeur comme dans le problème II ; car, on a encore ici une solution particulière du système à intégrer et qui est fournie par les valeurs de a, b, c.

Le problème s'achève ensuite sans quadratures. En effet, on connaît les moments de G par rapport au trièdre (A.XYZ) ; ou, ce qui revient au même, par rapport au trièdre (A'.X'Y'Z') ; d'autre part, on connaît maintenant la direction de A'X', ce qui permet de déterminer l'axe A'X' par rapport à un trièdre fixe dans le corps et dont une arête serait par exemple la droite du corps qui décrit la surface.

§ VI. — Exemple de détermination de roulette connaissant la base et la trajectoire d'un point

79. Soit $(O.xyz)$ (*fig.* 23) le trièdre fixe. Je suppose la trajectoire définie par les équations

$$x = \left[1 + \frac{1}{4}\,\mathrm{tg}\,\omega\left(e^{\psi\cos\omega} + e^{-\psi\cos\omega}\right)\right] r\cos\psi - \left[e^{\psi\cos\omega} - e^{-\psi\cos\omega}\right]\frac{r}{4}\sin\omega\sin\psi,$$

$$y = \left[1 + \frac{1}{4}\,\mathrm{tg}\,\omega\left(e^{\psi\cos\omega} + e^{-\psi\cos\omega}\right)\right] r\sin\psi + \left[e^{\psi\cos\omega} - e^{\psi\cos\omega}\right]\frac{r}{4}\sin\omega\cos\psi,$$

$$z = \left(e^{\psi\cos\omega} - e^{-\psi\cos\omega}\right)\frac{r}{4}\,\mathrm{tg}\,\omega\sin\omega,$$

dans lesquelles ω et r sont des constantes et ψ une variable arbitraire.

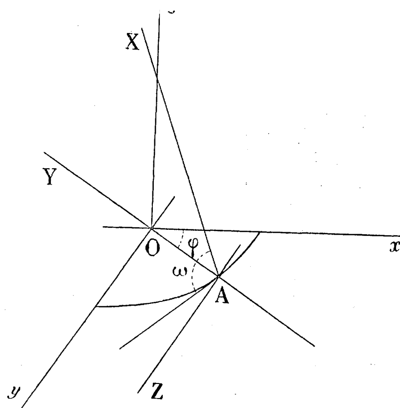


Fig. 23

En posant

$$e^{\psi\cos\omega} + e^{-\psi\cos\omega} = u,$$
$$e^{\psi\cos\omega} - e^{-\psi\cos\omega} = v,$$

ces équations se mettent sous la forme plus simple

$$(1)\quad \begin{cases} x = \left(1 + \frac{u}{4}\,\mathrm{tg}\,\omega\right) r\cos\psi - \frac{v}{4} r\sin\omega\sin\psi, \\ y = \left(1 + \frac{u}{4}\,\mathrm{tg}\,\omega\right) r\sin\psi + \frac{v}{4} r\sin\omega\cos\psi, \\ z = \frac{v}{4} r\,\mathrm{tg}\,\omega\sin\omega. \end{cases}$$

Je prends comme surface de base un hyperboloïde de révolution autour de Oz, dont le cercle de gorge situé dans le plan des xy a pour rayon r et dont les génératrices font l'angle ω avec le plan des xy. Le cercle de gorge étant la ligne de striction de la base, le trièdre attaché à cette surface sera formé par la génératrice AX, par la normale AOY et par la perpendiculaire AZ au plan des deux premières. Les neuf cosinus directeurs des arêtes de ce trièdre sont définis par les équations

$$(2)\ \begin{cases} \alpha = -\cos\omega\sin\varphi, \\ \beta = \cos\omega\cos\varphi, \\ \gamma = \sin\omega; \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} \alpha_1 = -\cos\varphi, \\ \beta_1 = -\sin\varphi, \\ \gamma_1 = 0; \end{cases} \qquad (4)\ \begin{cases} \alpha_2 = \sin\omega\sin\varphi, \\ \beta_2 = -\sin\omega\cos\varphi, \\ \gamma_2 = \cos\omega; \end{cases}$$

et si l'on appelle t l'arc de représentation sphérique de l'hyperboloïde, k le paramètre de distribution de cette surface, on a

$$dt = \cos\omega\, d\varphi, \qquad k = -r tg\omega$$

Enfin les coordonnées absolues du point A sont

$$(5)\qquad \begin{cases} x_1 = r\cos\varphi, \\ y_1 = r\sin\varphi, \\ z_1 = 0. \end{cases}$$

Cela posé, il faut d'abord établir la correspondance entre les points de la trajectoire et les génératrices de l'hyperboloïde, c'est-à-dire trouver la relation entre φ et ψ. Pour cela, je calcule les coordonnées X, Y, Z d'un point de la trajectoire rapporté au trièdre mobile (A.XYZ); elles sont données par les équations

$$(6)\qquad \begin{cases} X = \alpha(x-x_1) + \beta(y-y_1) + \gamma z, \\ Y = \alpha_1(x-x_1) + \beta_1(y-y_1) + \gamma_1 z, \\ Z = \alpha_2(x-x_1) + \beta_2(y-y_1) + \gamma_2 z, \end{cases}$$

où x, y, z, x_1, y_1, z_1 sont définis par les équations (1) et (5). En faisant la substitution, on trouve

$$\frac{X}{r} = \cos\omega\sin(\psi-\varphi) + \frac{u}{4}\sin\omega\sin(\psi-\varphi) + \frac{v}{4}\left[\sin\omega\cos\omega\cos(\psi-\varphi) + \sin^2\omega\,\mathrm{tg}\,\omega\right],$$

$$\frac{Y}{r} = 1 - \cos(\psi-\varphi) - \frac{u}{4}\mathrm{tg}\,\omega\cos(\psi-\varphi) + \frac{v}{4}\sin\omega\sin(\psi-\varphi),$$

$$\frac{Z}{r} = -\sin\omega\sin(\psi-\varphi) - \frac{u}{4}\mathrm{tg}\,\omega\sin\omega\sin(\psi-\varphi) + \frac{v}{4}\left[1-\cos(\psi-\varphi)\right]\sin^2\omega;$$

et, en portant ces valeurs dans l'équation

$$Y\frac{dY}{dt} + Z\frac{dZ}{dt} + XY + kZ = 0$$

qui définit la correspondance, on obtient, parmi les solutions de cette équation, la solution

$$\psi = \varphi.$$

Les valeurs de X, Y, Z exprimées alors en fonction de t deviennent

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= -\frac{k}{4}\left(e^t - e^{-t}\right), \\ Y &= \frac{k}{4}\left(e^t + e^{-t}\right) \\ Z &= 0, \end{aligned}\right.$$

et, en portant dans la relation

$$\frac{dZ}{dt} = \theta_1 Y - k,$$

on obtient ici

$$(8)\qquad \theta_1 = \frac{k}{Y} = \frac{4e^t}{e^{2t}+1}$$

La détermination des neuf cosinus du trièdre attaché à la roulette revient maintenant à l'intégration de l'équation de Riccati :

$$(9)\qquad \left(e^t + e^{-t}\right)\left(\frac{dx}{dt} + ix\right) = 2i(1 - x^2),$$

où x n'a pas, bien entendu, la même signification que dans les formules (1).

La forme de cette équation conduit à chercher une solution particulière de la forme

$$x = Ae^t + Be^{-t},$$

où A et B désignent des constantes à déterminer ; en exprimant que cette valeur de x satisfait à l'équation (9), on obtient les trois équations suivantes pour déterminer A et B :

$$A(1+i) = -2iA^2,$$

$$B(i-1) = -2iB^2,$$

$$A(i+1) + B(i-1) = 2i(1-2AB).$$

Ces équations sont vérifiées simultanément pour

$$A = \frac{i-1}{2},$$

$$B = -\frac{i+1}{2};$$

on en conclut que

$$(10) \qquad x_0 = -\frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right) + \frac{i}{2}\left(e^t - e^{-t}\right)$$

est une solution particulière de l'équation (9).

Pour trouver la solution générale, on pose

$$x = x_0 + \frac{1}{\lambda};$$

λ est alors déterminé par l'équation

$$(11) \qquad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{2i}{e^t + e^{-t}} - i\lambda - 2\lambda\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}},$$

dont l'intégrale générale est

$$\lambda = \frac{e^t + e^{-t} + i(e^t - e^{-t}) + (h + ih_1)e^{\ it}}{(e^t + e^{-t})^2}.$$

Dans tout ce qui suit je poserai

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} e^t + e^{-t} &= u, \\ e^t - e^{-t} &= v, \\ u + iv + (h + ih_1)e^{-it} &= \mathrm{P}, \\ u - iv + (h - ih_1)e^{it} &= \mathrm{Q}. \end{aligned} \right.$$

Je désignerai enfin par x_1 l'expression conjuguée de x.

De cette façon la solution générale de l'équation (9) sera

$$x = x_0 + \frac{u^2}{\mathrm{P}};$$

mais on sait que si σ est une solution de cette équation et si σ' est l'imaginaire conjuguée de σ, $-\frac{1}{\sigma'}$ est solution de la même équation; par conséquent

$$y = \frac{-1}{x_1 + \dfrac{u^2}{\mathrm{Q}}}$$

sera aussi solution de l'équation (9).

Cela posé, si l'on appelle maintenant α', β', γ'; $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1$; $\alpha'_2, \beta'_2, \gamma'_2$ les neuf cosinus du trièdre attaché à la roulette et rapporté à un trièdre fixe dans le corps, chacun des trois groupes de cosinus est déterminé par les formules

$$\left\{\begin{array}{lll} a = \dfrac{1-xy}{x-y}, & \text{pour} & \alpha', \beta', \gamma'; \\ a_1 = i\,\dfrac{1+xy}{x-y}, & \text{pour} & \alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, \\ a_2 = \dfrac{x+y}{x-y}, & \text{pour} & \alpha'_2, \beta'_2, \gamma'_2. \end{array}\right.$$

Les constantes h et h_1 qui entrent dans x et y varient d'ailleurs en passant d'un groupe de solutions à l'autre; nous les déterminerons en supposant que pour $t = 0$ on ait :

$$\text{(T)} \qquad \begin{array}{lll} \alpha = 0, & \alpha_1 = 1, & \alpha_2 = 0, \\ \beta = 0, & \beta_1 = 0, & \beta_2 = -1, \\ \gamma = -1; & \gamma_1 = 0; & \gamma_2 = 0. \end{array}$$

En remplaçant x et y par leurs valeurs, on a enfin

$$a = \frac{PQ(x_0 + x_1) + u^2(P+Q)}{PQ(1 + x_0x_1) + u^2(u^2 + Px_0 + Qx_1)},$$

$$a_1 = i\frac{PQ(x_1 - x_0) + u^2(P-Q)}{PQ(1 + x_0x_1) + u^2(u^2 + Px_0 + Qx_1)},$$

$$a_2 = \frac{PQ(x_0x_1 - 1) + u^2(u^2 + Px_0 + Qx_1)}{PQ(1 + x_0x_1) + u^2(u^2 + Px_0 + Qx_1)}.$$

Voici alors rapidement le calcul des neuf cosinus.

1° *Détermination de* $\alpha', \alpha'_1, \alpha'_2$. — Pour $t = 0$, en vertu du tableau (T) on doit avoir

$$x = i;$$

il en résulte

$$h = 0, \qquad h_1 = -2,$$

$$\alpha' = \frac{v \cos t}{u},$$

$$\alpha'_1 = \frac{1 \cos t - uv \sin t}{u^2},$$

$$\alpha'_2 = \frac{2(u \sin t + v \cos t)}{u^2}.$$

2° *Détermination de* β', β'_1, β'_2. — En vertu du tableau (T) on doit avoir maintenant pour $t = 0$,

$$x = 0;$$

il en résulte

$$h = 2, \qquad h_1 = 0,$$

$$\beta' = \frac{v \sin t}{u},$$

$$\beta'_1 = \frac{4 \sin t + uv \cos t}{u^2},$$

$$\beta'_2 = \frac{2(v \sin t - u \cos t)}{u^2}.$$

3° *Détermination de* γ', γ'_1, γ'_2. — Dans ce cas enfin on doit avoir

$$x = -1;$$

il en résulte

$$h = \infty, \qquad h_1 = \infty,$$

$$\gamma' = -\frac{2}{u},$$

$$\gamma'_1 = \frac{2v}{u^2},$$

$$\gamma'_2 = \frac{v^2}{u^2}.$$

En résumé, si l'on remplace u et v par leurs valeurs (12), on a le tableau suivant pour les neuf cosinus :

$$\left\{\begin{aligned} \alpha' &= \frac{(e^t - e^{-t}) \cos t}{e^t + e^{-t}}, \\ \beta' &= \frac{(e^t - e^{-t}) \sin t}{e^t + e^{-t}}, \\ \gamma' &= \frac{-2}{e^t + e^{-t}}; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \alpha'_1 &= \frac{4 \cos t - (e^{2t} - e^{-2t}) \sin t}{(e^t + e^{-t})^2}, \\ \beta'_1 &= \frac{4 \sin t + (e^{2t} - e^{-2t}) \cos t}{(e^t + e^{-t})^2}, \\ \gamma'_1 &= \frac{2(e^t - e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^2}; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \alpha'_2 &= \frac{2[(e^t+e^{-t})\sin t+(e^t-e^{-t})\cos t]}{(e^t+e^{-t})^2},\\ \beta'_2 &= \frac{2[(e^t-e^{-t})\sin t-(e^t+e^{-t})\cos t]}{(e^t+e^{-t})^2},\\ \gamma'_2 &= \frac{(e^t-e^{-t})^2}{(e^t+e^{-t})^2}.\end{aligned}\right.$$

80. **Détermination de la surface roulette.** — La détermination de la surface roulette s'achève sans difficulté. En effet, les coordonnées du point central rapporté à des axes qui passent par le point décrivant sont

$$\begin{aligned} \xi &= -\alpha'X - \alpha'_1Y - \alpha'_2Z,\\ \eta &= -\beta'X - \beta'_1Y - \beta'_2Z,\\ \zeta &= -\gamma'X - \gamma'_1Y - \gamma'_1Z,\end{aligned}$$

dans lesquelles les neuf cosinus ont les valeurs trouvées plus haut et X, Y, Z sont définies par les équations (7). On en conclut les expressions des coordonnées d'un point de la surface :

$$x' = \xi + \alpha'\rho \quad \text{etc.}$$

Les valeurs des invariants de cette surface sont enfin

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{4}{e^t+e^{-t}},\\ k &= -r \operatorname{tg} \omega,\\ h &= Y - \frac{dX}{dt} = \frac{k}{2}\left(e^t+e^{-t}\right).\end{aligned}$$

Remarque. — La développable asymptote est un cône puisque $Z = 0$.

Vu et approuvé :

Paris, le 22 juin 1892.

Le Doyen,

G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 23 juin 1892.

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

GRÉARD.

SECONDE THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Exposé des principaux résultats acquis à la Science en ce qui concerne l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes.

Vu et approuvé :

Paris, le 22 juin 1892.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 23 juin 1892.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

BAR-LE-DUC. — IMPRIMERIE COMTE-JACQUET.

ERRATA

Page 3, 4[e] ligne en remontant, au lieu de *choisie*, lire : *choisi*.

Page 7, Problème II, au lieu de trajectoires *des* deux, lire : trajectoires *de* deux.

Page 21, au lieu de

$$k - \theta y_1 = 0, \qquad y_1 = \frac{k}{\theta},$$

d'où

$$x_1 + \frac{dy_1}{dt} = 0, \qquad x_1 = -\frac{dy_1}{dt},$$

lire :

$$\left\{ \begin{array}{l} k - \theta y_1 = 0, \\ x_1 + \dfrac{dy_1}{dt} = 0, \end{array} \right. \qquad \text{d'où} \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = \dfrac{k}{\theta}, \\ x_1 = -\dfrac{dy_1}{dt}. \end{array} \right.$$

Page 23, 12[e] ligne en remontant, au lieu de longueur constante AI, lire : longueur constante A_1I.

Page 26, 11[e] ligne en descendant, au lieu de si l'on projette sur AX, lire : si l'on projette sur Ox.

Page 31, 6[e] ligne en remontant, au lieu de $\xi = 0$, lire : $\xi_1 = 0$.

Page 36, 1[re] ligne, au lieu de sont $0, \; -k, \; \rho$, lire : sont proportionnels à $0, \; -k, \; \rho$.

Page 37, modifier ainsi qu'il suit la dernière égalité (3)

$$z = k\gamma_1^2 + \gamma_2\left(\frac{\rho^2}{k}\gamma_2 - 2\rho\gamma_1\right).$$

Page 38, 3[e] ligne en remontant, au lieu de $v = \theta\rho$, lire : $V = \theta\rho$.

Page 41, 2[e] ligne en descendant, au lieu de ρ_1 et τ, lire : ρ_1 et τ_1.

Page 42, 3[e] ligne en descendant, au lieu de puisque, lire : *puis que*.

Page 57, au lieu de $S - S_0 = -C'\dfrac{R_1}{R_2} + a\dfrac{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}{R_2}$, lire : $-C'\dfrac{R_1}{R_2} + a\dfrac{R_1}{R_2^2}\sqrt{R_1^2 + R_2^2}$.

Page 59, 6[e] ligne en descendant, au lieu de courbure géodésique, lire : torsion géodésique.

Page 61, 8[e] ligne en remontant, au lieu de : Pour que le point I décrive une ligne de courbure, il faut et il suffit que sa vitesse soit dirigée, lire : Pour que le point M décrive une ligne de courbure, il faut et il suffit que la vitesse du point I soit dirigée.

Page 72, remplacer le dernier rapport (9) par $\dfrac{X + \omega Z}{-Y}$ et rectifier en conséquence les égalités suivantes.

Page 80, la lettre H remplace ωR.

Page 81, 5[e] ligne en remontant, au lieu de $K - \theta Y$, lire : $k - \theta Y$.

Page 94, écrire comme il suit l'égalité (9)

$$\frac{du}{dt} = -iu + \frac{i\theta_1}{2}(1 - u^2).$$

Page 94, dernière égalité, mettre ζ à la place de ξ.

Page 102, dans la valeur de λ, au lieu de $(h + ih_1)e^{it}$, lire : $(h + ih_1)e^{-it}$.